ELEMENTARY PLANE TRIGONOMETRY

IN

HINDÍ

WITH NUMEROUS EXAMPLES

BY

LAKSHMÍ SANKARA MIŚRA, M. A.,

OFFG. PROFESSOR OF MATHEMATICS, BENARES COLLEGE.

सरलत्रिकोणमिति की उपक्रमणिका

अनेक उदाहरण सहित

बनारस कालेज के गणिताध्यापक

लक्ष्मीशंकरमिश्र

की बनायी

BENARES:

MEDICAL HALL PRESS.

1873.

ELEMENTARY PLANE TRIGONOMETRY

IN

HINDÍ

WITH NUMEROUS EXAMPLES

BY

LAKSHMÍ S'ANKARA MIS'RA, M. A.,

OFFG. PROFESSOR OF MATHEMATICS, BENARES COLLEGE.

सरलत्रिकोणमिति की उपक्रमणिका

अनेक उदाहरण सहित

बनारस कालेज के गणिताध्यापक

लक्ष्मीशंकरमिश्र

की बनायी

BENARES:

MEDICAL HALL PRESS.

1873.

BENARES: PRINTED BY E. J. LAZARUS & Co.

PREFACE

The growth and development of the Hindi language must be admitted to be a matter of much interest by those whose object is to promote the material progress of the intellectual *status* of millions of people in the North-Western and the Central Provinces. The present time might justly be considered the era of the revival of the Hindi language, whose *nucleus* existed long before this, and consequently any addition to the scanty works in existence must be deemed opportune. At present the vernacular of the North West stands in need of original and translated works on different subjects, but the striking feature of Hindi is that it is extremely poor in scientific works, so much so that even a scientific vocabulary does not exist, and the stumbling block of all who attempt to enrich Hindi by composing scientific works is the want of a proper terminology. The first thing that a writer on science in Hindi would have to settle is how to find out suitable terms, and when this important point is satisfactorily settled, the way to compose works on science would be, as it were, cleared of all barriers. Many might be inclined to propose the retention of English terms in the vernaculars, observing the tendency of the time to be towards the assimilation of English words in the native

languages. However, it appears probable that if one were to advocate the use of English terminology, after a lapse of time the English names would be so changed that one who had not watched the gradual degeneracy of the terms would never be able to recognize them. Ultimately the fancied advantage might prove chimerical and the scientific Hindi might contain a host of corrupted English terms moulded after the native fashion. To those who are perfectly unacquainted with English such terms might even prove misleading. I have no objection to the retention and use of such words as mile, minute &c. which are very commonly used by the generality of the natives but I am not for the universal retention of the English terms. As the Sanskrit language is the fountain-head from which almost all the dialects of India take their share of words and particles, it is but fair not to discard the aid of this mighty resource in enriching the vernacular of a province. The richness of the Sanskrit language and the extreme ease that it affords in creating new words and making suitable compounds are facts that warrant us to conclude that a pretty good terminology can possibly be framed in Hindi. Further, when it is observed that there are some mathematical treatises in Sanskrit now extant, it appears incumbent upon an author to make use of all the technical words that already exist in Sanskrit and to coin words only in case of necessity. In elementary treatises on Pure Mathematics he will stand in need of a few words

only, but the case would be quite different with the physical subjects of Mathematics and other branches of scientific study. I must here mention the principle which I take for my guidance in constructing new words. The Sanskrit terms should be, as a general rule, connotative of the characteristic property of the thing denoted by the English words. I might as well exemplify the above. As I could hardly find a suitable term for 'moment of a force' in Statics, I have translated it by घूर्णनबल since the moment is exactly proportional to the tendency which the force has in producing a rotatory motion round a point or a right line. If the phrase be literally translated the Sanskrit equivalent would be whimsical and misleading. The lever has been called उत्तोलनदण्ड which literally means a lifting rod. The words that I have used for complementary and supplementary angles are समकोणावशिष्ट and द्विसमकोणावशिष्ट These terms convey precisely the idea given by the two English terms, and their exact sense can be understood even without the aid of an explanation or a definition.

The present work is a treatise on the Trigonometry of plane figures, containing just as much as would be necessary to impress a student with the principles of the elements as required for the application of the subject to the measurement of heights and distances and to the finding of expressions for area. The nature and use of logari-

thms have also been explained. Summation of series, exponential values of trigonometrical functions and other advanced portions of plane Trigonometry will be embodied in a separate volume which may require the occasional aid of the calculus. In the present work my object has been to arrange and treat of different subjects in such a manner as to require little help in the shape of further explanations. I have been very particular about the units, since a clear idea of the principles involved in the choice of units is absolutely necessary for a firm mathematical basis in a student. If a student obtain a clear conception of units at the outset of his studies, the hydrostatical and dynamical units will not ultimately present him any special difficulty. I have attempted to give clear explanations at every point where I thought the student would find any peculiar difficulty, but I have occasionally left out some easy steps which a student ought to make out for himself, in hopes that it may improve the mental powers of the reader and cause him to give up the habit of entire dependence on a book to understand the easiest steps. This kind of reliance is ever fatal towards the proper study of mathematics, and in teaching this important branch the mental powers of a student must be greatly exercised and proportionately improved.

The work contains copious examples selected from

standard English works. Many of the problems are original and a few have been taken from the latest Cambridge papers. In every chapter a few model solutions are given in order to enable a student to understand the proper method of solving Trigonometrical examples. These solutions are followed by collections of examples arranged, for the most part, in order of difficulty. There are also eight sets of problem papers containing examples of greater difficulty.

At the end of the volume there is a glossary containing the important technical terms that occur in the book with their English equivalents. It will prove of use to any one in want of proper trigonometrical terminology.

In composing the present treatise I have consulted many of the standard English works on the subject and have taken a number of technical terms from Pandit Bápudeva's Sanskrit Trigonometry. A few words have been coined on the principle that I have already explained.

LAKSHMÍ ŚANKARA MIŚRA.

BENARES COLLEGE,
December, 1873.

सरलत्रिकोणमिति ।

सूचीपत्र ।

सरलत्रिकोणमिति ।

अध्याय १

१। त्रिकोणमिति उस विद्या को कहते हैं जिस में त्रिभुज के कोणों और भुजाओं के सम्बन्ध का वर्णन हो। इस ग्रंथ में केवल वे त्रिभुज समझे जावेंगे जिन की सब भुजायें सीधी रेखा हैं और इसी लिये इस को सरलभुजक्षेत्रमिति वा सरलत्रिकोणमिति कहते हैं ॥

२। पहिले यह बात जानना अवश्य है कि कोण किसे कहते हैं और उस को किस प्रकार से अथवा किन प्रकारों से माप सकते हैं; रेखागणित में सरलकोण ऐसी दो सीधी रेखाओं के झुकाव को कहते हैं जो आपस में मिलें परन्तु एकही सीध में न हों। रेखागणित में प्रायः दो समकोण अथवा दो समकोण से बड़े कोण का वर्णन नहीं है परन्तु त्रिकोणमिति में कोण उन से बड़ा हो सकता है, यह न समझना चाहिये कि सर्व्वदा इस ग्रन्थ में कोण दो समकोण से छोटा होगा। यदि एक सीधी रेखा अचल रहे और दूसरी जो उस से किसी बिन्दु में मिली हो इस भांति घूमे कि इस के घूमने से उस बिन्दु की स्थिति में अन्तर न हो तो यह सीधी रेखा उस स्थितरेखा के साथ कोण बनावेगी ॥

३। (१ चित्र देखो) यह मान लो कि अकग एक स्थित सूधी रेखा है और कम एक दूसरी सूधी रेखा इस से समकोण बनाती है और क बिन्दु में इस से मिलती है एक दूसरी रेखा कख ले लो। अब पहिले कख को स्थिर रेखा कग से मिली रहने दो और इस स्थान से इस को घूमती हुई कल्पना करो, तो इस घूमनेवाली रेखा कख और स्थिर रेखा कग से एक कोण खकग बनता है जो कि कख के घूमने से बढ़ता जाता है। जब कख, कम और कग के बीच में आजाती है तब खकग आधे समकोण के तुल्य होता है, जब घूमते २ यह कम से मिल जाती है तब

एक समकोण बनता है; इसी प्रकार से जब कघ से मिलती है तब दो समकोण बनता है और जब कच से मिलती है तब कख और कच के बीच का कोण तीन समकोण के तुल्य होता है और इसी प्रकार से कख से मिलने के पीछे इस के घूमने से जो कोण बनता है वह ४ समकोण से बड़ा होता है और इसी भांति से कोण खकछ कछ के घूमने से और भी बड़ा हो सकता है॥

यदि दो सूधी रेखा एक निश्चित बिन्दु में मिलें और दोनों इस प्रकार से घूमें कि बिन्दु के स्थान में अंतर न हो तो इन दोनों रेखाओं से भी कोण बनता है जैसे घड़ी की दोनों सूइयों के बीच में सर्वदा एक कोण रहता है॥

४। हमने यहां कछ को कग की ओर घूमते कल्पना किया है परन्तु यह कख से कच की ओर भी घूम सक्ती है तो इस प्रकार से घूमने से जो कोण बनता है उस का वर्णन आगे होगा॥

५। जब किसी वस्तु की लंबाई को मापना चाहें तो एक दूसरी लंबाई से इसे मापते हैं, जैसे जब किसी दो स्थानों के बीच की दूरी जानना चाहते हैं तब एक 'गज़' या 'मील' या किसी और लंबाई को लेकर यह देखते हैं कि इस दूरी में कितनी ऐसी लंबाइयां हैं, इसी भांति जो दो 'गज़' लंबाई का प्रमाण लें तो चार गज़ लंबी वस्तु को (२) अंक से लिख सक्ते हैं। यहां दो से यह जानना चाहिये कि उसकी लंबाई में दो दो गज़ अथवा दो माप के प्रमाण हैं। इसी प्रकार से किसी वस्तु के मापने में कोई ऐसा प्रमाण लेना अवश्य है कि जिस के द्वारा माप सकें। यह भी जानना उचित है कि जब लंबाई मापें तो एक लंबाई माप का प्रमाण लेना होगा। इसी प्रकार से यदि कोई कोण मापा चाहें तो किसी कोण को प्रमाण नियत करके उसी से और कोणों को मापते हैं यह अवश्य है कि माप का प्रमाण कभी बदल न सके जैसे १ गज़ एक नियत लंबाई है॥

६ । समकोण के यदि ९० तुल्य भाग किये जावें तो ऐसे प्रत्येक भाग को अंश कहते हैं । अंश के साठवें भाग को कला कहते हैं और कला के साठवें भाग को विकला कहते हैं । इस प्रकार से यह जान सकते हैं कि एक कोण में कितने अंश हैं और यदि किसी कोण में पूरे अंश न हों तो इसमें जितने अंश कला और विकला हैं उतना लिख सक्ते हैं। किसी अंक के दाहिनी ओर ऊपर (°) ऐसा चिह्न लिखने से अंश समझना चाहिये, ऐसा चिह्न (′) कला का है और ऐसा (″) विकला का संकेत है ॥

उदाहरण । यदि एक समकोण के पांचवें भाग को अंशादि में लिखना चाहें तो इस प्रकार लिखने की रीति जानेंगे ॥

एक समकोण = ९०°

∴ एक समकोण का पांचवा भाग = ९०°/५ = १८°

यदि एक समकोण का आठवां भाग लिखना हो तो इस प्रकार से लिखेंगे, ११° १५′, इस प्रकार के कोण मापने की विधि को अंगरेज़ी रीति कहते हैं ॥

७ । यदि एक समकोण के १०० तुल्य भाग करें तो ऐसे प्रत्येक भाग को एक फरासीसी अंश अथवा ग्रेड कहते हैं, यदि एक ग्रेड के १०० तुल्य भाग किये जावें तो हर एक ऐसे भाग को फरासीसी कला कहते हैं और एक फरासीसी कला के सवें भाग को एक फरासीसी विकला कहते हैं। इनके लिखने के भी संकेत हैं, फरासीसी अंश कला विकला के लिये (ग ′ ″) अंक के ऊपर लिखते हैं जैसे यदि १५ फरासीसी अंश १३ कला २५ विकला लिखना हो तो ऐसे लिखेंगे १५^{ग} २५′ २५″·

यह फरासीसी रीति है और इस में समकोण के सौ सौ भाग किये जाने से बहुत सुगमता पड़ती है परंतु प्रायः अंगरेज़ी रीति से कोण का भाग किया जाता है क्योंकि यह बहुत दिनों से अंगरेज़ी गणित की पुस्तकों में है और सब पुरानी पुस्तकों में पायी जाती है ॥

८। यदि यह ज्ञात हो कि किसी कोण में कितने अंशादि हैं तो यह जान सक्ते हैं कि उस में कितने ग्रेड और उस के भाग होंगे और जो यह ज्ञात हो कि एक कोण में कितने ग्रेड हैं तो इस के अंश भी जान सक्ते हैं ॥

कल्पना करो कि किसी एक कोण में अ अंश हैं और यह भी कल्पना करो कि उसी कोण में ग ग्रेड हैं; क्योंकि एक समकोण में ९० अंश होते हैं और एक समकोण में १०० ग्रेड होते हैं इसलिये

$$\text{अ} : \text{ग} :: ९० : १००$$

अथवा $$९०\,\text{ग} = १००\,\text{अ}$$

$$\therefore ९\,\text{ग} = १०\,\text{अ}$$

$$\text{ग} = \text{अ} + \tfrac{१}{९}\,\text{अ} \qquad (१)$$

और $$\text{अ} = \tfrac{९}{१०}\,\text{ग} = \text{ग} - \tfrac{\text{ग}}{१०} \qquad (२)$$

(१) से यह समझा जाता है कि यदि किसी कोण में अंश की एक निश्चित संख्या हो तो यदि इस संख्या में इसका नवां भाग जोड़ दें तो इस प्रकार से जो मिले वह उसी कोण में के ग्रेड की संख्या होगी ॥

(२) से यह ज्ञात होता है कि जो किसी कोण में के ग्रेड की संख्या जानी हो तो उस में से उस संख्या का दसवां भाग निकाल लेने से अंश की संख्या मिलेगी ॥

९। उदाहरण। जिस कोण में ४५ अंश हैं उसमें कितने ग्रेड होंगे?

$$\text{ग} = \text{अ} + \frac{१}{९}\,\text{अ}$$

$$\therefore \text{ग} = ४५ + \frac{४५}{९} = ५०,$$

$५०^{\text{ग}}$ उत्तर है ॥

यदि किसी कोण में ६० ग्रेड हों तो उसमें कितने अंश होंगे?

$$ख = ग - \frac{ग}{१०}$$
$$= ६० - \frac{६०}{१०}$$
$$= ६० - ६$$
$$= ५४° \text{ उत्तर ॥}$$

१० । अब कल्पना करो कि किसी कोण में क अंगरेजी कला हैं और ख फरासीसी कला; क्योंकि एक समकोण में ६०×९० अंगरेजी कला और १००×१०० फरासीसी कला होती हैं इसलिये

$$\frac{क}{ख} = \frac{६० \times ९०}{१०० \times १००}$$
$$= \frac{५४}{१००}$$
$$= \frac{२७}{५०}$$
$$\therefore\ क = \frac{२७}{५०} ख$$
$$\text{और } ख = \frac{५०}{२७} क$$

११ । कल्पना करो कि किसी कोण में ग अंगरेजी विकला और घ फरासीसी विकला हैं; क्योंकि एक समकोण में ९०×६०×६० अं· विकला और १००×१००×१०० फरासीसी विकला हैं इसलिये

$$\frac{ग}{घ} = \frac{९० \times ६० \times ६०}{१०० \times १०० \times १००} = \frac{८१}{२५०}$$
$$\therefore\ ग = \frac{८१}{२५०} घ \text{ और } घ = \frac{२५०}{८१} ग$$

१२ । कोण मापने का एक और प्रकार है जिस को चक्रीय माप कहते हैं यह बहुत अच्छा प्रकार है और इस को भली भांति से जानना अवश्य है। जो दो सीधी रेखाओं के मिलने से एक कोण बने और जिस बिंदु में वे मिलें उसे केंद्र मान कर उस से किसी दूरी पर एक वृत्त बनाया जावे तो कोण के सामने के चाप और व्यासार्द्ध के संबंध से कोण का माप सकेंगे जैसा कि आगे वर्णन होगा ॥

१३ । किसी चक्र का व्यासार्द्ध ज्यों ज्यों बढ़ता अथवा घटता जायगा त्यों २ उस की परिधि भी बढ़ती अथवा घटती जायगी ॥

कल्पना करो कि कखगघ और $\text{क}_1\text{ख}_1\text{ग}_1\text{घ}_1$ एककेंद्रीय वृत्त हैं जिन की परिधि प प_1 हैं (२ क्षेत्र देखो) इन प्रत्येक में न तुल्य भुजा के बहुभुजक्षेत्र बनाओ और कल्पना करो कि कख खग ········ और $\text{क}_1\text{ख}_1$ $\text{ख}_1\text{ग}_1$······ इत्यादि ये भुजाएं हैं । अब दो त्रिभुज कअख और $\text{क}_1\text{अख}_1$ में कअख कोण दोनों में है और अकख कोण $\text{अक}_1\text{ख}_1$ के तुल्य है और अखक कोण $\text{अख}_1\text{क}_1$ के तुल्य है इसलिये

$$\frac{\text{अक}}{\text{अक}_1} = \frac{\text{अख}}{\text{अख}_1} = \frac{\text{कख}}{\text{क}_1\text{ख}_1} \text{ इसी प्रकार से } \frac{\text{अख}}{\text{अख}_1} = \frac{\text{गख}}{\text{ग}_1\text{ख}_1}$$

$$\text{अथवा } \frac{\text{अक}}{\text{अख}_1} = \frac{\text{गख}}{\text{ग}_1\text{ख}_1} \text{ इसलिये}$$

$$\frac{\text{न}\cdot\text{अक}}{\text{न}\cdot\text{अक}_1} = \frac{\text{कख} + \text{खग} + \text{गघ} + \cdots\cdots\cdots}{\text{क}_1\text{ख}_1 + \text{ख}_1\text{ग}_1 + \text{ग}_1\text{घ}_1 \cdots\cdots\cdots}$$

$$\therefore \frac{\text{अक}}{\text{अक}_1} = \frac{\text{कख} + \text{खग} + \text{गघ} \cdots\cdots\cdots}{\text{क}_1\text{ख}_1 + \text{ख}_1\text{ग}_1 + \text{ग}_1\text{घ}_1 \cdots\cdots\cdots}$$

ज्यों ज्यों भुजाओं की संख्या बढ़ती जाती है त्यों २ प्रत्येक भुजा छोटी होती जाती है यहां तक कि यदि भुजाओं की संख्या बहुत बढ़ा दें तो प्रत्येक भुजा अतिही छोटी होजायगी और अंत में भुजा की संख्या को बहुत बढ़ाने से किसी एक भुजा और उसके सामने के चाप में अतिही कम अंतर रहेगा और इस अंतर को भुजा की संख्या बढ़ाने से और न्यून कर सक्ते हैं यहां तक कि अंत में किसी अतिही छोटी भुजा और उस के सामने के चाप को एकही समझ सक्ते हैं इस लिये जब भुजाओं की संख्या बहुत बढ़ाई जावें तो क्षेत्र की सब भुजाएं मिलकर परिधि के तुल्य होंगी इसलिये अंत में

$$\frac{\text{अक}}{\text{अक}_1} = \frac{\text{प}}{\text{प}_1}$$

१४। किसी वृत्त की परिधि और व्यास के संबंध के लिये यूनानी अक्षर (पाई) π लिखते हैं इसलिये यदि किसी वृत्त की परिधि प है

और व्यासार्द्ध व हो तो $\frac{\text{प}}{\text{२व}} = \pi$ अर्थात प = २ π व और यह π, ३·१४१५९ ...... के तुल्य है ॥

१५ । यदि एक वृत्त के केन्द्र पर दो व्यासार्द्ध से एक ऐसा कोण बने कि उस कोण के सामने का चाप उस वृत्त के व्यासार्द्ध के तुल्य हो तो इस प्रकार का कोण चाहे किसी वृत्त में हो पर एकही परिमाण का रहेगा अर्थात बड़ा छोटा न होगा ॥

कल्पना करो (३ क्षेत्र देखो) कि कअख एक कोण है । अब अ को केन्द्र मानकर किसी एक दूरी अक से एक वृत्त बनाओ, यह भी कल्पना करो कि चाप कख अक सीधी रेखा के तुल्य है ॥

अब रेखागणित के ६ अध्याय में सिद्ध किया गया है कि किसी दो चापों में वही सम्बन्ध होता है जो उन कोणों में होता है जिन के सामने वे हैं ॥

$$\therefore \frac{\text{कअख}}{\text{४ समकोण}} \quad \frac{\text{चाप कख}}{\text{पूरी परिधि}}$$

$$= \frac{\text{चाप कख}}{\text{२}\pi\text{ कअ}} \quad \frac{\text{१}}{\text{२}\pi}$$

$$\therefore \text{कोण कअख} = \frac{\text{४ समकोण}}{\text{२}\pi} = \frac{\text{२ समकोण}}{\pi}$$

अब यहां हम यह देखते हैं कि कअख कोण जिसके तुल्य है वह एक निश्चित संख्या है क्योंकि दो समकोण और π निश्चित हैं; चाहे व्यासार्द्ध कितनाही बड़ा या छोटा हो परंतु ये दो संख्या ज्यों की त्यों रहेंगी न तो घटेंगी न तो बढ़ेंगी, इसलिये व्यासार्द्ध चाहे कितनाही बड़ा हो अर्थात किसी वृत्त में हो पर कोण कअख जिसके सामने का चाप व्यासार्द्ध के तुल्य है सब वृत्त में एकही होगा ॥

१६ । ऐसे कोण को प्रमाण मानकर और सब कोणों को मापते हैं और इसको चक्रीयमाप का प्रमाण कहते हैं । यदि यह जानना हो कि इस कोण में कितने अंश हैं तो इस प्रकार से जान सक्ते हैं ॥

कल्पना करो कि कखग कोण में य अंश हैं तो

$$\frac{य}{१८०} = \frac{चाप कख}{आधा परिधि} = \frac{र}{\pi र} = \frac{१}{\pi}$$

यहां र = व्यासार्ध

$$\therefore य = \frac{१८०}{\pi} = \frac{१८०}{३\cdot१४१५९\cdots} = ५७\cdot२९५७७९\cdots$$

इसलिये चक्रीय माप का प्रमाण ५७·२९५७७९··· अंश के तुल्य होता है ॥

१७ । अब यह कल्पना करो (४ क्षेत्र देखो) कि गकख और घकख दो कोण हैं जो कि वृत्त के व्यासार्द्धों के बीच में हैं यह भी कल्पना करो कि घकख एक ऐसा कोण है कि उसके सामने का चाप-गख कघ के तुल्य है । कल्पना करो कि गख = च और घख = व

रेखागणित से

$$\frac{\angle गकख}{\angle घकख} = \frac{चाप गख}{चाप घख}$$

$$\therefore \angle गकख = \frac{च}{व} \times घकख$$

यदि ∠ घकख को माप का प्रमाण मान लें तो

$$\angle गकख = \frac{च}{व}$$

१८ । इसलिये किसी कोण का चक्रीय माप $\frac{चाप}{व्यासार्द्ध}$ है, दो समकोण का चक्रीय माप π है क्योंकि दो समकोण के सामने का चाप π व है ॥

१९। चक्रीय माप और अंशादि का संबन्ध इस प्रकार से जान सक्ते हैं ॥

कल्पना करो कि किसी कोण का चक्रीय माप च है और उसी कोण में अ अंशादि हैं। तो क्योंकि दो समकोण का चक्रीय माप π है और दो समकोण में १८० अंश होते हैं इसलिये

$$\pi : च :: १८० : अ$$

$$\therefore \frac{च}{\pi} = \frac{अ}{१८०}$$

$$\therefore च = \frac{\pi}{१८०} अ \text{ और } अ = \frac{१८०}{\pi} च$$

२०। यदि चक्रीय माप और ग्रेड आदि का संबन्ध जानना हो तो इस प्रकार से जानेंगे ॥

कल्पना करो कि उस कोण में ग ग्रेडादि हैं जिस का चक्रीय माप च है तो क्योंकि दो समकोण में २०० ग्रेड हैं इसलिये

$$ग : २०० :: च : \pi$$

$$\therefore \pi ग = २०० च$$

$$\therefore ग = \frac{२००}{\pi} च \text{ और } च = \frac{\pi}{२००} ग$$

२१। यदि किसी वृत्त के व्यासार्द्ध की लंबाई के माप का प्रमाण मान लें तो वह संख्या जो किसी कोण के सामने के चाप के लिये लिखी जासक्ती है और वह संख्या जिसे उस कोण के चक्रीय माप के लिये लिखेंगे एकही होगी। तो इस अवस्था में उस चाप से कोण मापा जासक्ता है ॥

उदाहरण ।

१। ४०° १०' में कितने फ॰ अंशादि हैं?

$$४०°\,१०' = ४०\tfrac{१०}{६०}° = ४०\tfrac{१}{६}°$$

$४०\tfrac{१}{६}°$ में $४०\tfrac{१}{६}\times\tfrac{१०}{९}$ येड हैं

$$४०\frac{१}{६}\times\frac{१०^{ग}}{९} = \frac{२४१०}{५४} = ४४\frac{३४}{५४}^{ग} = ४४^{ग},\ ६२\frac{५२}{५४}'$$

$$= ४४^{ग}\ ६२'\ ९६\frac{८}{२७}''$$ उत्तर

२। किसी समद्विबाहुत्रिभुज के आधार पर के प्रत्येक कोण तीसरे कोण के दूने हैं, इस त्रिभुज के प्रत्येक कोण में कितने अंश हैं?

कल्पना करो कि छोटे कोण में क अंश हैं।

$$\text{इसलिये}\quad क + २क + २क = १८०°$$

$$५क = १८०$$

$$क = \frac{१८०}{५} = ३६$$

$$२क = ७२$$

इसलिये एक कोण ३६° है और दूसरे में ७२ अंश हैं ॥

३। समबाहुअष्टकोण के एक कोण में के येड की संख्या और समबाहुद्वादशकोण के एक कोण के अंश की संख्या में क्या संबंध है?

कल्पना करो कि अष्टकोण के एक कोण में क अंश हैं और द्वादशकोण के एक कोण में ख येड हैं ॥

रेखागणित के ३२ साध्य के अनुमान से

$$क = २०० - \frac{४००}{८} = २०० - ५० = १५०$$

$$ख = १८० - \frac{३६०}{१२} = १८० - ३० = १५०$$

∴ क = ख

४। समबाहुषट्कोण के किसी एक कोण का चक्रीयमाप क्या है?

कल्पना करो कि एक कोण में क° हैं

$$\text{तब} \quad \text{क} = १८० - \frac{३६०}{६} = १८० - ६० = १२०^{\circ}$$

$$\text{इसलिये चक्रीयमाप} = \frac{१२० \pi}{१८०} = \frac{२ \pi}{३} \text{ उत्तर}$$

५। यदि किसी वृत्त का व्यासार्ध ५४ फुट हो तो २७ फुट लम्बे चाप के साम्हने के केन्द्रीय कोण में कितने अंश होंगे?

कल्पना करो की इस कोण में क अंश हैं।

$$\text{क} = \frac{१८०}{\pi} \times \frac{\text{चाप}}{\text{व्यासार्ध}} = \frac{१८०}{\pi} \times \frac{२७}{५४} = \frac{१८०}{२ \pi}$$

$$= ५७{\cdot}२९५७८ \times \frac{१}{२} = २८{\cdot}६४७८९ \text{ उत्तर}$$

६। पृथ्वी का व्यासार्ध ४००० मील का है १ अंश के साम्हने का चाप कितना लम्बा होगा?

$$\text{सर्वदा} \quad \text{क}^{\circ} = \frac{१८०}{\pi} \times \frac{\text{चाप}}{\text{व्यासार्ध}}$$

$$\therefore १^{\circ} = \frac{१८०}{\pi} \times \frac{\text{चाप}}{४०००} = \frac{९ \text{ चाप}}{२०० \pi}$$

$$९ \times \text{चाप} = २०० \pi$$

$$\text{चाप} = \frac{२०० \pi}{९} \text{ मील, उत्तर}$$

७। किसी त्रिभुज के कोण अनुपात श्रेणी में हैं सब से छोटे कोण के अंश में और सब से बड़े के चक्रीयमाप में वही सम्बन्ध है जो ६० और π में है, त्रिभुज के सब कोणों को निकालो।

कल्पना करो कि क° ख° ग° तीनों कोण हैं ।

क + ग = २ख क्योंकि क और ख का अंतर ख और ग के अंतर के तुल्य है ।

क्योंकि एक त्रिभुज के कोण दो समकोण के तुल्य होते हैं ।

इसलिये $क + ख + ग = १८०$

अथवा $क + ग + \frac{क + ग}{२} = १८०$

$$३ (क + ग) = ३६०$$

$$क + ग = १२०$$

और क अंश में $\frac{१० क}{९}$ ग्रेड हैं

ग अंश का चक्रीय माप $\frac{\pi}{१८०}$ ग है

$$\frac{१० क}{९} : \frac{\pi}{१८०} ग :: ३० : \pi$$

$$\therefore \frac{१० क \pi}{९} = \frac{३० \pi ग}{१८०} = \frac{\pi ग}{६}$$

$$२० क = ३ ग \quad क = \frac{३}{२०} ग$$

इसलिये $\frac{३}{२०} ग + ग = १२०$

$$ग = \frac{१२० \times २०^{\circ}}{२३}$$

$$क = \frac{१२० \times ३^{\circ}}{२३}$$

$$ख = ६०^{\circ}$$

८ । यदि ४५° को ३½ से लिखें तो कोण मापने का प्रमाण क्या है ?

कल्पना करो कि क° प्रमाण है

$$४५ \times १° = ३\tfrac{१}{२} \times क°$$

$$इसलिये \quad क = \frac{४५}{३\frac{१}{२}} = \frac{९०}{७} = १२\frac{६}{७} \quad उत्तर$$

९ । यदि एक अं० कला मापप्रमाण हो तो एक फ० कला के लिये कौन अंक लिखा जायगा ?

एक फ० कला = $\frac{१}{१००}$ ग्रेड

= $\frac{९}{१०} \times \frac{१}{१००}$ अंश

= $\frac{९}{१०००} \times ६०$ अं० कला

= $\frac{२७}{५०}$ अं० कला

इसलिये यदि अं० कला प्रमाण हो तो इसे १ समझेंगे इसलिये $\frac{२७}{५०}$ उत्तर है ।

१० । यदि दो अंश और ३ ग्रेड की मापक संख्या मिलकर १ के तुल्य हो तो प्रमाण का चक्रीय माप क्या है ?

कल्पना करो कि प्रमाण कोण में क अंश हैं तो

$$१° \text{ का माप } \frac{१}{क} \text{ है}$$

$$२° \text{ का माप } \frac{२}{क} \text{ है}$$

१ ग्रेड में $\frac{९}{१०}$° हैं

इसलिये ३ ग्रेड में $\frac{२७}{१०}$° हैं

$$३ \text{ ग्रेड का माप } \frac{२७}{१० क} \text{ है}$$

$$\therefore \frac{२}{क} + \frac{२७}{१० क} = १$$

$$क = २ + \frac{२७}{१०}$$

$$= \frac{४७}{१०} = ४\frac{७}{१०}$$

इसलिये प्रमाण कोण में ४° ४२′ हैं ।

११ । ४५°, ३०′ ३५″ में कितने क॰ अंशादि हैं ?

१२ । ५८ग ९′ ३०″ में कितने अंशादि हैं ?

१३ । दो समकोण के ·१२५ भाग में कितने अंश हैं ?

१४ । उस समद्विबाहुत्रिभुज के शीर्ष कोण का चक्रीय माप क्या है जिस के आधार पर के प्रत्येक कोण शीर्ष कोण के $\frac{१}{२}$ हैं ?

१५ । समबाहुदशकोण के प्रत्येक कोण में कितने ग्रेड हैं ?

१६ । समबाहुअष्टकोण के एक कोण के ग्रेड और समबाहुपञ्चकोण के एक कोण के चक्रीय माप में क्या सम्बन्ध है ?

१७ । किसी समबाहुबहुकोणक्षेत्र के सब कोण में उतने ग्रेड हैं जितने एक द्वादशकोण के सब कोण में अंश हैं बतलाओ कि इस बहुकोण क्षेत्र में कितनी भुजाएं हैं ।

१८ । किसी असमबाहुबहुकोणक्षेत्र के अंतःकोण अनुपात श्रेणी में हैं सब से छोटे कोण में १२०° हैं और श्रेणी का अंतर ५ अंश है बतलाओ कि क्षेत्र में कितनी भुजाएं हैं ?

१९ । किसी त्रिभुज के एक कोण में ग ग्रेड हैं और दूसरे में ग अंश हैं, तीसरे कोण का चक्रीय माप क्या है ?

२० । एक कोण में जितने अंश हैं उतनेही ग्रेड उसके समकोणावशिष्टकोण में है इस कोण का चक्रीय माप क्या है ?

२१ । किसी वृत्ताकार रेल की सड़क का व्यासार्ध $\frac{१}{२}$ मील है तो ६०° के साम्हने का चाप कितना लम्बा होगा ?

२२ । एक समद्विबाहुत्रिभुज का शीर्ष कोण २४° है, बतलाओ कि आधार पर के कोण में कितने वेद होंगे?

२३ । यदि वृत्त के परिधि के ३०० तुल्य भाग करें और ऐसे एक को प्रमाण लें तो उस कोण को किस अंक से लिखेंगे जिसके साम्हने का चाप व्यासार्ध के तुल्य है?

२४ । पृथ्वी के कील पर घूमने के कारण एक मनुष्य जो भूपरिधि पर स्थित है प्रत्येक घंटे में कितनी दूर जाता है?

२५ । यदि एक समकोण का तीसरा भाग कोणमापप्रमाण लिया जावे तो ७५° को किस संख्या से लिखेंगे?

२६ । यदि दो मापप्रमाण में १०° का भेद होने से किसी कोण के मापक संख्याओं में ३ : २ का संबन्ध हो तो दोनों प्रमाणों में कितने अंश हैं?

२७ । एक समबाहुबहुभुजक्षेत्र में दूसरे समबाहुबहुभुजक्षेत्र की दूनी भुजाएं हैं परन्तु पहिले क्षेत्र का एक कोण दूसरे के एक कोण का $\frac{१}{५}$ है बतलाओ कि इन क्षेत्रों के अन्तःकोण में कितने अंश हैं।

२८ एक चतुर्भुज के कोण गुणोत्तर श्रेणी में हैं तीसरे कोण और पहिले कोण के चतुर्थांश में ९०° का अन्तर है, चारों कोणों को निकालो ॥

अध्याय २

२९ । त्रिकोणमिति में + और − संकेतों का वर्णन ।

कल्पना करो कि किसी स्थिर रेखा $कक_१$ में अ एक निश्चित बिन्दु है अख की लंबाई यदि ग है तो ख की दूरी अ से ग है, यह दूरी क

$क_१$ $ख_१$ अ ख क

की ओर मापी जाती है । अब यह मान लो कि $अख_१$ भी ग के तुल्य है तो यदि यह कहें कि $कक_१$ रेखा में अ से कोई लंबाई ग के बराबर

काट लो तो इतने कहने से यह नहीं निश्चित होता कि इस ... को क की ओर अथवा $क_1$ की ओर मापेंगे इसलिये यदि हमको क की ओर मापना हो तो इतना कहना पूरा नहीं होगा इसलिये जब एक ओर अख लंबाई मापना हो तो जितनी लंबाई चाहें उसके आगे + चिह्न रखते हैं और दूसरी ओर मापने में − का चिह्न रखते हैं। इस पुस्तक में जो कोई लंबाई दाहिनी ओर मापी जायगी उसके आगे + चिह्न रक्खेंगे और जो बांई ओर मापी जायगी उसके आगे − रक्खेंगे, जैसे यदि अख और $अख_1$ दोनो ग के तुल्य हों तो अख के लिये + ग लिखेंगे और $अख_1$ के लिये − ग लिखेंगे; यह अति अवश्य नहीं है परन्तु इससे बहुत सुगमता पड़ती है ॥

२३। इसी प्रकार से कोण के पहिले भी + वा − रखने से जो भेद पड़ता है उसका वर्णन करते हैं ॥ (५ क्षेत्र देखो) कल्पना करो कि कख एक स्थित रेखा है और कग के घूमने से कख के साथ कोई कोण बनता है पहिले यह कल्पना करो कि कग कख के उपर की ओर घूमती है और इस प्रकार घूमने से कल्पना करो कि कोई कोण गकख बनता है फिर यह कल्पना करो कि कग जब कख से नीचे की ओर घूमती है तब कग के स्थान पर आने से कोण $खकग_1$, ∠ खकग के तुल्य बनता है तो यदि इन कोणों में से प्रत्येक य के तुल्य हो तो यदि एक को + य कहेंगे तो दूसरे को − य कहेंगे। इस पुस्तक में ऊपर की ओर घूमने से जो कोण बनेगा उसके पूर्व में + रक्खेंगे और नीचे की ओर जो बनता है उसे − कहेंगे जैसे खकग को + य औ $खकग_1$ को − य कहेंगे। यह भी जानना चाहिये कि खकग को एक धन कोण समझ सकते है और इसको ऋण कोण (चार सम कोण − ∠ खकग) के तुल्य भी समझ सक्ते हैं ॥

२४। कल्पना करो (६ क्षेत्र देखो) कि $कअक_1$ और $खअख_1$ दो ऐसी रेखा हैं जो आपस में समकोण बनाती हैं यदि किसी बिन्दु का स्थान जानना हो तो जो ऊपर लिखा गया है उससे इस प्रकार से जानेंगे।

कल्पना करो कि प$_1$ की दूरी अख से च है और अक से छ है यह भी कल्पना करो कि प$_2$ प$_3$ प$_4$ की दूरी कख और अख से छ और च है तो यदि प$_1$ लें तो इसके लिये + च, + छ लिखेंगे

$\left.\begin{matrix} -\text{च} \\ +\text{छ} \end{matrix}\right\}$ प$_2$ के स्थान को बतलाता है ।

$\left.\begin{matrix} -\text{च} \\ -\text{छ} \end{matrix}\right\}$ प$_3$ ... ...

$\left.\begin{matrix} +\text{च} \\ -\text{छ} \end{matrix}\right\}$ प$_4$ ... ...

जब कोई लंबाई कअक$_1$ के ऊपर की ओर मापी जाती है तब उसके आगे + का चिह्न रहेगा और जब नीचे की ओर मापी जाय तो − का चिह्न रखना होगा ॥

त्रिकोणमितीय संबन्धों का लक्षण ।

२५ । कल्पना करो कि अक एक स्थित रेखा है और अप रेखा के घूमने से अक के साथ कोई कोण बनता है (७, ८, ९, और १० क्षेत्र देखो)

यह कोण अक के ऊपर की ओर घूमने से + समझा जायगा और नीचे घूमने से − समझा जायगा जैसा कि पहिले कह चुके हैं। इस घूमनेवाली रेखा अप में कोई बिन्दु प ले लो और इस बिन्दु से कक$_1$ रेखा पर एक लंब पन खींचो ॥

यह अवश्य नहीं है कि घूमती रेखा में बिन्दु लेकर स्थिर रेखा पर लंब खींचें पर स्थित रेखा में कोई बिन्दु लेकर घूमती रेखा पर भी खींच सके हैं ॥

अब अपन एक समकोणत्रिभुज है परंतु चारों क्षेत्र में उनकी भुजाओं में चिह्न मात्र का भेद है तो यदि कअप कोण को + अ कहें और उचित चिह्न त्रिभुज की भुजाओं के साथ लें तो

$\frac{\text{पन}}{\text{अप}}$ अर्थात $\frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}}$ को अ कोण की ज्या कहते हैं

$\frac{\text{अन}}{\text{अप}}$ ... ... $\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ ... ... कोटिज्या ... ...

$\frac{\text{पन}}{\text{अन}}$ ... ... $\frac{\text{लंब}}{\text{आधार}}$ ... ... स्पर्शरेखा ... ...

$\frac{\text{अन}}{\text{पन}}$ ... ... $\frac{\text{आधार}}{\text{लंब}}$ ... ... कोटिस्पर्शरेखा ...

$\frac{\text{अप}}{\text{अन}}$ ... ... $\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$ ... ... छेदनरेखा ... ...

$\frac{\text{अप}}{\text{पन}}$ ... ... $\frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}}$ ... ... कोटिच्छेदनरेखा...

और १, एक में से किसी कोण की कोटिज्या को घटाने से जो मिलता है उसको उत्क्रमज्या कहते हैं; यदि एक में से [illegible] की ज्या निकालें तो जो बचता है उसे कोट्युत्क्रमज्या कहते हैं ॥

२६। ऊपर लिखे से यह भी ज्ञात होता है कि किसी कोण की ज्या के भाज्य और हर के परिवर्त्तन से जो मिलता है वह उसी कोण की कोटिच्छेदन रेखा है, इसी प्रकार से कोज्या के भाज्य और हर के परिवर्त्तन से छेदनरेखा और स्पर्शरेखा के भाज्य और हर के परिवर्त्तन से कोटिस्पर्शरेखा मिलती है ॥

$$\text{इसलिये ज्या अ} = \frac{1}{\text{कोटिच्छेदनरेखा अ}}$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{1}{\text{छेदनरेखा अ}}$$

$$\text{स्पर्शरेखा अ} = \frac{1}{\text{कोटिस्पर्शरेखा अ}}$$

२७ । ऊपर के लक्षणों में अपन त्रिभुज की भुजाओं के साथ कोई बीजगणितीय चिह्न नहीं लिया क्योंकि उस स्थान पर केवल सामान्य लक्षण लिखा था और यह कह दिया था कि उचित चिह्न लेना अवश्य है । अब (७) क्षेत्र में सब रेखा के आगे धन का चिह्न होगा (८) में अन ऋण है (९) में अन और पन ऋण हैं (१०) में केवल पन ऋण है इसलिये

	७ में	८ में	९ में	१० में
ज्या अ =	$\frac{पन}{अप}$	$\frac{पन}{अप}$	$-\frac{पन}{अप}$	$-\frac{पन}{अप}$
कोज्या अ =	$\frac{अन}{अप}$	$-\frac{अन}{अप}$	$-\frac{अन}{अप}$	$\frac{अन}{अप}$
स्पर्श अ =	$\frac{पन}{अन}$	$-\frac{पन}{अन}$	$\frac{पन}{अन}$	$-\frac{पन}{अन}$
कोटिस्प अ =	$\frac{अन}{पन}$	$-\frac{अन}{पन}$	$\frac{अन}{पन}$	$-\frac{अन}{पन}$
छेद रेखा अ =	$\frac{अप}{अन}$	$-\frac{अप}{अन}$	$-\frac{अप}{अन}$	$\frac{अप}{अन}$
कोटिछे० अ =	$\frac{अप}{पन}$	$\frac{अप}{पन}$	$-\frac{अप}{पन}$	$-\frac{अप}{पन}$

२८ । जब तक कोण नहीं बदलता तब तक उसके त्रिकोणमितीय संबन्ध भी नहीं बदलते ॥

कल्पना करो (११ क्षेत्र देखो) कि कअख कोई कोण है, अख रेखा में कोई दो बिन्दु प और $प_1$ लो और इन बिन्दुओं से पन और $प_1 न_1$ अक पर लंब खींचो, तो रेखागणित से यह ज्ञात होता है कि पन : अन : अप = $प_1 न_1$: $अन_1$: $अप_1$ यदि अक रेखा में कोई बिन्दु $प_2$ लें और

उस में अब पर $प_२ न_२$ लंब खींचें तो भी रेखागणित से यह ज्ञात है कि पन : अन : अप

$= प_२ न_२ : अन_२ : अप_२$

$= प_१ न_१ : अन_१ : अप_१$

इसलिये जब तक कोण नहीं बदलता तब तक त्रिकोणमितीय संबन्ध भी नहीं बदलते ॥

२९ । किसी एक कोण को एक समकोण में से निकालने से जो कोण बचता है उसे पहिले कोण का समकोणावशिष्ट कहते हैं ॥

किसी एक कोण को दो समकोण में से निकालने से जो बचता है उस पहिले कोण का द्विसमकोणावशिष्ट कहते हैं ॥

३० । अब किसी कोण और उसके समकोणावशिष्ट में जो संबन्ध है उसका वर्णन करते हैं ॥

कल्पना करो कि (१२ क्षेत्र देखो) पअन कोई समकोणत्रिभुज है जिसमें अनप समकोण है तो

$\angle$ पअन + $\angle$ अपन = ९०

$\therefore \angle$ अपन = ९० − $\angle$ पअन

इसलिये $\angle$ अपन, पअन कोण का समकोणावशिष्ट है । $\angle$ अपन को $\angle$ प कहो और $\angle$ पअन को $\angle$ अ

$$ज्या\ अ = \frac{पन}{अप} = कोज्या\ प = कोज्या\ (९० - अ)$$

$$स्पर्श\ अ = \frac{पन}{अन} = कोस्पर्श\ प = कोस्पर्श\ (९० - अ)$$

$$छेद\ अ = \frac{अप}{अन} = कोछेद\ प = कोछेद\ (९० - अ)$$

इससे यह बात ज्ञात होती है कि किसी कोण की ज्या अपने समकोणावशिष्ट की कोज्या के तुल्य है ॥

किसी कोण की स्पर्शरेखा अपने समकोणावशिष्ट की कोटिस्पर्शरेखा के तुल्य है और किसी कोण की छेदनरेखा अपने समकोणावशिष्ट की कोटिच्छेदनरेखा के तुल्य है

३३ । कल्पना करो कि (१२ क्षेत्र देखो) अ किसी समकोणत्रिभुज अपन का एक कोण है

$$\text{स्पर्श अ} = \frac{\text{पन}}{\text{अन}} = \frac{\text{पन}}{\text{अप}} \div \frac{\text{अन}}{\text{अप}}$$

$$= \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (१)$$

$$\text{कोस्पर्श अ} = \frac{\text{अन}}{\text{पन}} = \frac{\text{अन}}{\text{अप}} \div \frac{\text{पन}}{\text{अप}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (२)$$

$$\text{स्पर्श अ} = \frac{\text{पन}}{\text{अन}} = \frac{१}{\frac{\text{अन}}{\text{पन}}} = \frac{१}{\text{कोस्पर्श अ}}$$

$$\therefore \text{स्पर्श अ} \times \text{कोटिस्पर्श अ} = १ \quad \ldots \ldots \quad (३)$$

$$\text{ज्या अ} = \frac{\text{पन}}{\text{अप}} = \frac{१}{\frac{\text{अप}}{\text{पन}}} = \frac{१}{\text{कोटिछेद अ}}$$

$$\therefore \text{कोटिछेद अ} \times \text{ज्या अ} = १ \quad \ldots \ldots \quad (४)$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{\text{अन}}{\text{अप}} = \frac{१}{\frac{\text{अप}}{\text{अन}}} = \frac{१}{\text{छेद अ}}$$

$\therefore$ कोज्या अ $\times$ छेरे अ = १ ... ... (५)

यह अवश्य नहीं कि कोण ९०° से कम हो उचित क्षेत्र बनाकर बड़े कोणों का संबन्ध भी सिद्ध कर सकते हैं॥

३४। यह सिद्ध करना है कि

$$(\text{ज्या अ})^2 + (\text{कोज्या अ})^2 = 1$$

अब अपन त्रिभुज में (१२ क्षेत्र)

$$\text{अप}^2 = \text{पन}^2 + \text{अन}^2$$

$$\therefore \frac{\text{पन}^2}{\text{अप}^2} + \frac{\text{अन}^2}{\text{अप}^2} = 1$$

$$\therefore (\text{ज्या अ})^2 + (\text{कोज्या अ})^2 = 1$$

बहुधा $(\text{ज्या अ})^2$ को $\text{ज्या}^2\text{अ}$ लिखते हैं और इसी प्रकार से $(\text{कोस्पर्श अ})^4$ को $\text{कोस्पर्श}^4\text{अ}$ लिखेंगे।

३५। यह सिद्ध करना है कि $1 + \text{स्प}^2\text{अ} = \text{छे}^2\text{अ}$

और $1 + \text{कोटिस्प}^2\text{अ} = \text{कोछे}^2\text{अ}$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} + \text{कोज्या}^2\text{अ} = 1 \quad \dots \dots \dots (\text{क})$$

$$\therefore 1 + \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{1}{\text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$1 + \text{कोस्पर्श}^2\text{अ} = \text{कोछे}^2\text{अ}$$

(क) को कोज्या² अ से भाग दो तो

$$\frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}} + 1 = \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}$$

$$\therefore \text{स्प}^2\text{अ} + 1 = \text{छेरे}^2\text{अ}$$

इसे क्षेत्र से भी सिद्ध कर सकते हैं॥

२६ । कल्पना करो कि ज्या अ = ज तो क्योंकि

$$ज्या^2 अ + कोज्या^2 अ = १$$

इसलिये

$$कोज्या^2 अ = १ - ज^2$$

$$कोज्या\ अ = \pm \sqrt{(१ - ज^2)}$$

$$स्परे\ अ = \frac{ज्या\ अ}{कोज्या\ अ} = \frac{ज्या\ अ}{\pm\sqrt{(१ - ज्या^2 अ)}} = \frac{ज}{\pm\sqrt{(१ - ज^2)}}$$

$$कोस्परे\ अ = \frac{१}{स्परे\ अ} = \frac{\pm\sqrt{(१ - ज^2)}}{ज}$$

$$छेरे\ अ = \frac{१}{कोज्या\ अ} = \pm \frac{१}{\sqrt{(१ - ज^2)}}$$

$$कोछे\ अ = \frac{१}{ज्या\ अ} = \frac{१}{ज}$$

३० । कल्पना करो कि स्पर्शरेखा अ = स

$$ज्या^2 अ = \frac{१}{कोछे^2 अ} = \frac{१}{१ + कोस्प^2 अ} = \frac{१}{१ + \frac{१}{स्प^2 अ}}$$

$$= \frac{स्प^2 अ}{१ + स्प^2 अ} = \frac{स^2}{१ + स^2}$$

$$\therefore\ ज्या\ अ = \pm \frac{स}{\sqrt{(१ + स^2)}}$$

$$कोज्या\ अ = \frac{१}{छेरे\ अ} = \frac{१}{\pm\sqrt{(१ + स्प^2 अ)}} = \frac{१}{\pm\sqrt{(१ + स^2)}}$$

$$कोस्परे\ अ = \frac{१}{स्परे\ अ} = \frac{१}{स}$$

$$\text{छे अ} = \pm\sqrt{(१ + \text{स्प}^2\text{अ})} = \pm\sqrt{(१ + \text{स}^2)}$$

$$\text{कोटिछे अ} = \frac{१}{\text{ज्या अ}} = \pm\frac{\sqrt{१ + \text{स}^2}}{\text{स}}$$

३८। वर्गमूल के चिह्न के आगे दो चिह्न लिखे गये हैं अर्थात $\pm$ इसका कारण यह है कि बहुत से कोण ऐसे हैं कि जिनका कोई त्रिकोणमितीय संबंध एक ही है केवल चिह्न में भेद रहता है जैसे एक कोण पहिले चतुर्थांश में और एक दूसरे में ऐसे हैं जिनके त्रि० सम्बन्ध में केवल चिह्न का भेद है पर इनकी ज्या एक ही चिह्न की एक संख्या होगी इसलिये यदि ज्या का मान दिया हो तो कोज्या के मान के लिये + अथवा ऋण एक संख्या आवेगी इससे यह जानना चाहिये कि यदि वह कोण जिसकी ज्या ज्ञात है पहिले चतुर्थांश में है तो कोज्या + है और यदि दूसरे में है तो − है, पर यदि केवल ज्या का मान दिया हो तो यह नहीं जानते कि कोण किस चतुर्थांश में है इसलिये यह नहीं निश्चित है कि + वा − लगे इसलिये $\pm$ लिखते हैं। इसी प्रकार से और संबंधों के पूर्व $\pm$ लिखने का कारण समझना चाहिये।

३९। ३०° और ६०° के कोणों का त्रिकोणमितीय संबंध जानना है।

कल्पना करो कि (१३ क्षेत्र देखो) अकख कोई समत्रिबाहुत्रिभुज है, अ बिन्दु से कख पर अप लंब खींचो।

क्योंकि अकख समत्रिबाहु है इसलिये इसके प्रत्येक कोण में ६०° हैं $\therefore$ अकप = ६०° पर कपअ = ९०° $\therefore$ कअप = ३०°

$$\text{ज्या अकप} = \frac{\text{अप}}{\text{अक}} = \frac{\sqrt{\text{अक}^2 - \text{कप}^2}}{\text{अक}} = \frac{\sqrt{\text{अक}^2 - \frac{१}{४}\text{अक}^2}}{\text{अक}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\therefore \text{ज्या } ६० = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

कोज्या ६० = $\frac{\text{कप}}{\text{खक}} = \frac{१}{२}$

स्परे ६० = $\frac{\text{ज्या ६०}}{\text{कोज्या ६०}} = \frac{\sqrt{३}}{२} \div \frac{१}{२} = \sqrt{३}$

कोस्प ६० = $\frac{१}{\text{स्प ६०}} = \frac{१}{\sqrt{३}}$

छेरे ६० = $\frac{१}{\text{कोज्या ६०}} = २$

कोछे ६० = $\frac{१}{\text{ज्या ६०}} = \frac{२}{\sqrt{३}}$

उत्क्रमज्या ६० = $१ - \frac{१}{२} = \frac{१}{२}$

ज्या ३०° = ज्या (९० − ६०) = कोज्या ६० = $\frac{१}{२}$

कोज्या ३० = ज्या ६० = $\frac{\sqrt{३}}{२}$

स्परे ३० = कोस्प ६० = $\frac{१}{\sqrt{३}}$

कोस्प ३० = स्प ६० = $\sqrt{३}$

छेरे ३० = कोछे ६० = $\frac{२}{\sqrt{३}}$, कोछे ३० = २

४० । ४५° के कोण के त्रिकोणमितीय संबंधों को जानना है ॥

कल्पना करो कि (१४ क्षेत्र देखो) कखग कोई समकोण है खक में एक बिन्दु घ लो, खघ को खक के तुल्य बनाओ, कघ को मिला दो,

क्योंकि ∠ घकख = ∠ खघक और

ख = ९० इसलिये खघक = ४५°

$$\text{ज्या } ४५° = \text{ज्या खगक} = \frac{\text{कख}}{\text{कग}} = \frac{\text{कख}}{\sqrt{(\text{कख}^२ + \text{खग}^२)}} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{कोज्या } ४५° = \text{ज्या } (९० - ४५) = \text{ज्या } ४५ = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{स्पर्श } ४५° = \frac{१}{\sqrt{२}} \div \frac{१}{\sqrt{२}} = १$$

$$\text{कोस्पर्श } ४५ = \frac{१}{\text{स्पर्श } ४५} = १$$

$$\text{छेद } ४५° = \frac{१}{\text{कोज्या } ४५} = \sqrt{२}$$

$$\text{कोछे } ४५ = \frac{१}{\text{ज्या } ४५} = \sqrt{२}$$

$$\text{उत्क्रमज्या } ४५ = १ - \frac{१}{\sqrt{२}} = \frac{\sqrt{२} - १}{\sqrt{२}}$$

६०, ३० और ४५ अंश के त्रिकोणमितीय संबंधो में वर्गमूल के पूर्व + चिह्न रक्खा है इसका कारण यह है कि ये सब कोण पहिले चतुर्थांश में हैं इसलिये इनके [illegible] संबंध धन हैं।

४१। किसी कोण का वक्रीय माप उसकी ज्या से अधिक और स्पर्शरेखा से न्यून होता है।

कल्पना करो कि (१५ क्षेत्र देखो) पवन एक कोण है, कप उस वृत्त का चाप है जिसका केन्द्र व है, प से एक लम्ब पन खींचो, क से एक रेखा कख खींचो जो वृत्त को स्पर्श करे।

यह स्पष्ट है कि

कप, पन से अधिक है और कख से न्यून है

$\therefore \frac{\text{कप}}{\text{खप}}, \frac{\text{पन}}{\text{खप}}$ से अधिक है और $\frac{\text{कख}}{\text{खक}}$ से न्यून है

यदि पखन कोण को य कहें तो

य का वृत्तीय माप $\frac{\text{पक}}{\text{खप}}$ है ज्या य $= \frac{\text{पन}}{\text{खप}}$ और स्पर्श य $= \frac{\text{कख}}{\text{कख}}$

$\therefore$ य > ज्या य और य < स्पर्श य

४२। यदि य अति छोटा किया जावे तो यह जानना है कि

$\frac{\text{ज्या य}}{\text{य}}$ और $\frac{\text{स्पर्श य}}{\text{य}}$ का क्या मान होगा?

यह ज्ञात है कि य, ज्या य और स्पर्श य के बीच में है

इसलिये $\frac{\text{य}}{\text{ज्या य}}$, १ और $\frac{१}{\text{कोज्या य}}$ के बीच में है

जब य = ० (अर्थात बहुत ही न्यून है) तब कोज्या य = १

परंतु $\frac{\text{य}}{\text{ज्या य}}$ सर्व्वदा १ और $\frac{१}{\text{कोज्या य}}$ के बीच में है

इसलिये जब य = ० तब $\frac{\text{य}}{\text{ज्या य}} = १$

क्योंकि १ और १ के बीच सिवाय १ के और कुछ नहीं हो सकता

इसलिये $\frac{\text{ज्या य}}{\text{य}}$ और १ में अति ही कम अंतर है जब य बहुत छोटी संख्या है।

$\because \frac{\text{स्पर्श य}}{\text{य}} = \frac{\text{ज्या य}}{\text{य}} \times \frac{१}{\text{कोज्या य}}$

$\therefore$ जब य = ० तब $\frac{\text{स्पर्श य}}{\text{य}} = १$

उदाहरण ।

१ । $\text{स्पर्श य} = \frac{३}{४}$ तो ज्याय और कोज्या य का मान क्या होगा?

$$\text{ज्या य} = \frac{१}{\text{कोछे य}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्पर्श}^{२}\text{य}}} = \frac{१}{\sqrt{\left\{१ + \frac{१६}{९}\right\}}} = \frac{३}{५}$$

$$\text{कोज्या य} = \sqrt{\left\{१ - \text{ज्या}^{२}\text{य}\right\}} = \sqrt{\left\{१ - \frac{९}{२५}\right\}} = \frac{४}{५} \text{ उत्तर ।}$$

२ । सिद्ध करो कि $\frac{\text{स्पर्श क} + \text{स्पर्श ख}}{\text{कोस्पर्श क} + \text{कोस्पर्श ख}} = \text{स्पर्श क} \times \text{स्पर्श ख}$

$$\frac{\text{स्पर्श क} + \text{स्पर्श ख}}{\text{कोस्पर्श क} + \text{कोस्पर्श ख}} = \frac{\text{स्पर्श क} + \text{स्पर्श ख}}{\frac{\text{स्पर्श क} + \text{स्पर्श ख}}{\text{स्पर्श क} \times \text{स्पर्श ख}}} = \text{स्पर्श क} \times \text{स्पर्श ख ।}$$

३ । ज्या य + कोज्या य = १ में से य का मान निकालो ।

$$\text{ज्या य} + \text{कोज्या य} = १$$

$$\therefore\ \text{ज्याय} + \sqrt{१ - \text{ज्या}^{२}\text{य}} = १$$

$$\sqrt{१ - \text{ज्या}^{२}\text{य}} = १ - \text{ज्या य}$$

$$१ - \text{ज्या}^{२}\text{य} = १ - २\,\text{ज्याय} + \text{ज्या}^{२}\text{य}$$

$$२\,\text{ज्या य} = २\,\text{ज्या}^{२}\text{य}$$

$$\text{ज्या य} = ० \text{ अथवा ज्या य} = १$$

$$\text{इसलिये य} = ० \text{ वा } \frac{\pi}{२}$$

४ । यदि $\text{कोज्या फ} = \text{न ज्या क}$ और $\text{कोस्पर्श फ} = \frac{\text{ज्या क}}{\text{स्पर्श ख}}$

$$\text{तो कोज्या ख} = \frac{\text{न}}{\pm\sqrt{(१ + \text{न}^{२}\,\text{कोज्या}^{२}\text{क})}}$$

$$कोस्परे^2 फ = \frac{ज्या^2 क}{स्परे^2 ख}$$

$$स्परे^2 फ = \frac{स्परे^2 ख}{ज्या^2 क}$$

$$कोज्या^2 फ = न^2 ज्या^2 क$$

$$\therefore\ न^2 ज्या^2 क = \frac{1}{1 + \frac{स्परे^2 ख}{ज्या^2 क}} = \frac{ज्या^2 क}{ज्या^2 क + स्परे^2 ख}$$

$$न^2 = \frac{1}{ज्या^2 क + छेरे^2 ख - 1} = \frac{1}{छेरे^2 ख - कोज्या^2 क}$$

$$\frac{न^2}{कोज्या^2 ख} - न^2 कोज्या^2 क = 1$$

$$कोज्या^2 ख = \frac{न^2}{1 + न^2 कोज्या^2 ख}$$

इसलिये $कोज्या ख = \frac{न}{\pm\sqrt{(1 + न^2 कोज्या^2 क)}}$

५ । इनमें से य निकालडालना है

$कोछेरे^2 य = म स्परे य$

$छेरे^2 य = न कोस्परे य$

दोनो समीकरणों को गुणा तब

$कोछेरे^2 य \times छेरे^2 य = मन$

$$\frac{1}{ज्या य कोज्या य} = \sqrt{मन}$$

समीकरणों को इस प्रकार से भी लिख सकते हैं

$$\frac{1}{ज्या^2 य} = म \frac{ज्या य}{कोज्या य}$$

$$\frac{\text{१}}{\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{य}} = \text{न}\ \frac{\text{कोज्या य}}{\text{ज्या य}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{कोज्या य}}{\text{ज्या}^{\text{३}}\text{य}} = \text{म}$$

$$\frac{\text{ज्या य}}{\text{कोज्या}^{\text{३}}\text{य}} = \text{न}$$

$$\sqrt{\frac{\text{कोज्या य}}{\text{ज्या}^{\text{३}}\text{य}}} + \sqrt{\frac{\text{ज्या य}}{\text{कोज्या}^{\text{३}}\text{य}}} = \sqrt{\text{म}} + \sqrt{\text{न}}$$

$$\frac{\text{कोज्या य}}{\text{ज्या}^{\text{३}}\text{य}} + \frac{\text{ज्या य}}{\text{कोज्या}^{\text{३}}\text{य}} + \frac{\text{२}}{\text{ज्या य कोज्या य}} = (\sqrt{\text{म}} + \sqrt{\text{न}})^{\text{२}}$$

$$\frac{\text{ज्या}^{\text{४}}\text{य} + \text{कोज्या}^{\text{४}}\text{य} + \text{२ ज्या}^{\text{२}}\text{य कोज्या}^{\text{२}}\text{य}}{\text{ज्या}^{\text{३}}\text{य कोज्या}^{\text{३}}\text{य}} = (\sqrt{\text{म}} + \sqrt{\text{न}})^{\text{२}}$$

$$\frac{\text{१}}{\text{ज्या}^{\text{३}}\text{य कोज्या}^{\text{३}}\text{य}} = (\sqrt{\text{म}} + \sqrt{\text{न}})^{\text{२}}$$

पर $\frac{\text{१}}{\text{ज्याय कोज्याय}} = \sqrt{\text{मन}}$

$$\therefore\ (\text{मन})^{\frac{\text{३}}{\text{२}}} = (\sqrt{\text{म}} + \sqrt{\text{न}})^{\text{२}}$$

६। छेरे$^{\text{२}}$य $= \frac{\text{४ चछ}}{(\text{च} + \text{छ})^{\text{२}}}$ सम्भव है या नहीं?

$$\frac{\text{१}}{\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{य}} = \frac{\text{४ चछ}}{(\text{च} + \text{छ})^{\text{२}}}$$

$$\text{कोज्या य} = \frac{\text{च} + \text{छ}}{\text{२}\sqrt{\text{चछ}}}$$

$(\sqrt{\text{च}} - \sqrt{\text{छ}})^{\text{२}}$ सर्वदा धन है इसलिये यह शून्य से अधिक है

$$\therefore \text{च} + \text{क} - २\sqrt{\text{चक}} > ०$$

$$\text{च} + \text{क} > २\sqrt{\text{चक}}$$

$$\therefore \frac{\text{च} + \text{क}}{२\sqrt{\text{चक}}} > १$$

इसलिये कोज्याय > १

पर कोज्या एक से अधिक नहीं हो सकती इसलिये समीकरण संभव नहीं है ।

७ । किसी कोण की स्पर्शरेखा $= \frac{३}{४}$ और त्रिकोणमितीय संबंधों को निकालो ।

८ । किसी कोण की ज्या $= \frac{५}{८}$ और त्रि· संबंध निकालो ।

९ । किसी कोण की छे·रेखा = ३ और त्रि· संबंध निकालो ।

१० । यदि उत्क्रमज्या $= \frac{१}{१३}$ और त्रिको· संबंधों को निकालो ।

११ । किसी कोण की कोस्पर्शरेखा $= -\frac{४}{३}$ और त्रि· संबंधों को निकालो ।

१२ । सिद्ध करो कि $\text{कोज्या}^४\text{य} - \text{ज्या}^४\text{य} = १ - २\ \text{ज्या}^२\text{य}$

१३ । सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या क}\ (१ + \text{स्परे क}) + \text{कोज्या क}\ (१ + \text{कोस्परे क})$$

$$= (\text{ज्या क} + \text{कोज्या क}) \times \frac{१}{\text{ज्या क कोज्या क}}$$

१४ । सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या}^२\text{क कोज्या}^२\text{ख} - \text{कोज्या}^२\text{क ज्या}^२\text{ख} = \text{ज्या}^२\text{क} - \text{ज्या}^२\text{ख}$$

१५ । सिद्ध करो कि $\text{स्परे क} + \text{कोस्परे क} = \pm\sqrt{(\text{छेरे}^२\text{क} + \text{कोछेरे}^२\text{क})}$

१६ । सिद्ध करो कि $\frac{\text{ज्या क कोज्या क}}{\text{छेरे क कोछेरे क}} = \text{ज्या}^२\text{क} - \text{ज्या}^४\text{क}$

१७ । सिद्ध करो कि $-$ कोस्परे क + कोछेरे क $= \dfrac{\text{ज्या क}}{१ + \text{कोज्या क}}$

१८ । सिद्ध करो कि स्परे^{२}क स्परे^{२}ख $-$ १ $= \dfrac{\text{ज्या}^२\text{क} - \text{कोज्या}^२\text{ख}}{\text{कोज्या}^२\text{क कोज्या}^२\text{ख}}$

१९ । सिद्ध करो कि

छेरे^{२}क कोछेरे^{२}क $-$ २ $=$ स्परे^{२}क + कोस्परे^{२}क

२० । सिद्ध करो कि कोछेरे य (छेरे य $-$ १) + ज्या य $=$

कोस्परे य (१ $-$ कोज्या य) + स्परे य

इन समीकरणों में से य का मान निकालो

२१ । कोस्परे य $=$ २ कोज्या य

२२ । ज्या^{२}य + $\frac{१}{४}$ $=$ २ कोज्या य

२३ । स्परे य + ३ कोस्परे य $=$ ४

२४ । ६ कोस्परे^{२} य $=$ १ + ४ कोज्या^{२} य

२५ । यदि $\dfrac{\text{कोस्परे य} - \text{छेरे य}}{\text{कोस्परे य}} = \frac{१}{१६}$

तो स्परे य $= \pm \frac{३}{४}$

२६ । यदि स्परे य $= \dfrac{\text{म}}{\text{न}}$ कोज्या क और ज्या य $= \dfrac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या ख}}$

तो ज्या ख $= \pm \dfrac{\sqrt{(\text{न}^२ + \text{म}^२ \text{कोज्या}^२\text{क})}}{\text{म}}$

२७ । यदि ज्या क $=$ मज्या ख और स्परे क $=$ नस्परे ख

तो कोज्या^{२}क $= \dfrac{\text{म}^२ - १}{\text{न}^२ - १}$

२८ । यदि $\frac{१ + \text{स्पर्श}\ य}{१ - \text{स्पर्श}\ य} = \frac{म}{न}$ तो छेद्रे य निकालो

२९ । यदि स्पर्श य स्पर्श क = १ तो ज्या क = कोज्या य

३० । इन समीकरणों में से य और फ को निकाल कर एक दूसरा समीकरण बनाओ

ज्या य = म कोज्या फ + नज्या फ

कोज्या य = मज्या फ − न कोज्या फ

३१ । स्पर्श य + ज्या य = म

स्पर्श य − ज्या य = न

इनमें से य निकाल डालो

३२ । यदि य बहुत छोटा किया जावे तो $\frac{\text{ज्या}\ मय}{\text{ज्या}\ नय}$ का मान क्या है?

३३ । यदि कोस्प^{३}य = $\frac{२}{३}$ तो $\frac{२}{\text{कोज्या}\ य} + \frac{३}{\text{ज्या}\ य} = \left(\sqrt[३]{४} + \sqrt[३]{९}\right)^{\frac{३}{२}}$

३४ । यदि ज्या क = म ज्या ख

और स्पर्श क = न स्पर्श ख

तो ज्या क और कोज्या ख का मान निकालो

अध्याय ३

४३। इसके पहिले यह कह आये हैं कि किसी कोण को दो सम कोण में से निकालने से जो बचता है उसे पहिले कोण का द्विसमकोणावशिष्ट कहते हैं। प्रायः लोग इससे यह समझेंगे कि जो कोण निकाला जाता है वह दो समकोण से अवश्य न्यून होगा पर ऐसा समझना ठीक नहीं है यदि अ कोई कोण हो तो (१८० − अ), अ का द्विसमकोणावशिष्ट है चाहे अ दो समकोण से बड़ा हो चाहे छोटा हो चाहे अ धन हो चाहे ऋण हो।

४४। यदि अ के त्रिकोणमितीय संबंध ज्ञात हैं तो (१८० − अ) के संबंधों को जानना है।

कल्पना करो कि पअन (१६ क्षेत्र) कोई कोण है अ बिंदु पर एक कोण $न_1अप_1$ नअप के तुल्य बनाओ, अप में एक बिंदु प लो और पन लंब अन पर खींचो $अप_1$ को अप के तुल्य काटो, $प_1न_1$ $अन_1$ पर लम्ब खींचो। यदि पअन को अ कोण कहें तो

$$\text{प}_1\text{अन} = १८० - \text{प}_1\text{अन}_1 = १८० - \text{अ}$$

क्योंकि दोनो त्रिभुज पअन और $प_1अन_1$ हर प्रकार से आपस में तुल्य हैं।

इसलिये ∠ $प_1अन$ अ कोण का द्विसमकोणावशिष्ट है।

$$\text{ज्या अ} = \frac{\text{पन}}{\text{अप}}\,;\ \text{ज्या}\,(१८० - \text{अ}) = \frac{\text{प}_1\text{न}_1}{\text{अप}_1}$$

पन, $प_1न_1$ के तुल्य है और दोनों के पूर्व धन का चिह्न है क्योंकि ये दोनो रेखा $नन_1$ के ऊपर की ओर मापी जाती हैं और अप = $अप_1$

$$\therefore \frac{\text{पन}}{\text{अप}} = \frac{\text{प}_1\text{न}_1}{\text{अप}_1}$$

$\therefore$ ज्या अ = ज्या (१८० – अ)

$$\text{कोज्या अ} = \frac{\text{अन}}{\text{अप}},\ \text{कोज्या}\ (१८० - \text{अ}) = \frac{\text{अन}_1}{\text{अप}_1}$$

अन_1 लम्बाई में अन के तुल्य है परंतु क्योंकि अन और अन_1 एकही ओर नहीं मापी जाती हैं इसलिये + अन = – अन_1

$$\therefore \frac{\text{अन}}{\text{अप}} = -\frac{\text{अन}_1}{\text{अप}_1}$$

$\therefore$ कोज्या अ = – कोज्या (१८० – अ)

$$\text{स्पर्श अ} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{\text{ज्या}\ (१८० - \text{अ})}{-\text{कोज्या}\ (१८० - \text{अ})} = -\text{स्पर्श}\ (१८० - \text{अ})$$

$$\text{कोस्पर्श अ} = \frac{१}{\text{स्पर्श अ}} = \frac{१}{-\text{स्पर्श}\ (१८० - \text{अ})} = -\text{कोस्पर्श}\ (१८० - \text{अ})$$

$$\text{छेद अ} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}} = \frac{१}{-\text{कोज्या}\ (१८० - \text{अ})} = -\text{छेद}\ (१८० - \text{अ})$$

$$\text{कोटिछेद अ} = \frac{१}{\text{ज्या अ}} = \frac{१}{\text{ज्या}\ (१८० - \text{अ})} = \text{कोछेद}\ (१८० - \text{अ})$$

४५ । तुल्य धन और ऋण कोणों के त्रिकोणमितीय संबंध ।

कल्पना करो कि कअप कोई कोण है (१७,१८ क्षेत्र) इस कोण को अ कहो । अप रेखा में कोई बिंदु प लेलो और अ पर एक कोण $\text{क}_1\text{अप}_1$ पअक के तुल्य बनाओ, अप_1 रेखा में से अप_1 अप के तुल्य काटो, पप_1 मिलाओ ।

पअन और $\text{प}_1\text{अन}$ त्रिभुजों में दो भुजा पअ और अप_1 आपस में तुल्य हैं और पअन कोण $\text{प}_1\text{अन}$ कोण के तुल्य है इसलिये पन = $\text{प}_1\text{न}$ और ∠ अनप = ∠ अनप_1 इसलिए हर एक एक समकोण है ।

क्योंकि $\angle$ पअन और $\angle$ प$_१$अन दो विरुद्ध दिशा में नापे जाते हैं इसलिये यदि पअन को +अ कहें तो प$_१$अन को − अ कहेंगे ॥

$$\text{ज्या अ} = \frac{\text{पन}}{\text{अप}} \text{ और ज्या } (-\text{अ}) = \frac{\text{प}_१\text{न}}{\text{अप}_१}$$

$$\text{पन} = -\text{प}_१\text{न और अप} = \text{अप}_१$$

$$\therefore \text{ ज्या अ} = -\text{ज्या } (-\text{अ})$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{\text{अन}}{\text{अप}}, \text{ कोज्या } (-\text{अ}) = \frac{\text{अन}}{\text{अप}_१}$$

$$\text{अप} = \text{अप}_१$$

$$\therefore \text{ कोज्या अ} = \text{कोज्या } (-\text{अ})$$

$$\text{स्परे } (-\text{अ}) = \frac{\text{ज्या } (-\text{अ})}{\text{कोज्या } (-\text{अ})} = \frac{-\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = -\text{स्परे अ}$$

$$\text{कोस्परे } (-\text{अ}) = \frac{१}{\text{स्परे } (-\text{अ})} = \frac{१}{-\text{स्परे अ}} = -\text{कोस्परे अ}$$

$$\text{छेरे } (-\text{अ}) = \frac{१}{\text{कोज्या } (-\text{अ})} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}} = \text{छेरे अ}$$

$$\text{कोछेरे } (-\text{अ}) = \frac{१}{\text{ज्या } (-\text{अ})} = \frac{१}{-\text{ज्या अ}} = -\text{कोछेरे अ} ।$$

४६ । यह सिद्ध करना है कि ज्या (१८० + अ) = − ज्या अ

और कोज्या (१८० + अ) = − कोज्या अ ।

कल्पना करो कि पअन अ कोण है (१९ क्षेत्र) अप में कोई विन्दु प लो और पअ को पअ$_१$ तक ऐसा बढ़ाओ कि प$_१$अ पअ के तुल्य हो, पन और प$_१$न$_१$ कक$_१$ पर लम्ब खींचो; पअप$_१$ = १८०°

इसलिये कअप$_१$ = १८० + अ

$ज्या अ = \frac{पन}{अप}$, $ज्या\ (१८० + अ) = \frac{प_१न_१}{अप_१}$

पन और $प_१न_१$ की लम्बाई तुल्य हैं पर पन $कक_१$ के ऊपर और $प_१न_१$ $कक_१$ के नीचे है इसलिये $पन = -प_१न_१$

$अप = अप_१$

$\therefore\ ज्या\ (१८० + अ) = -ज्या अ$

$कोज्या\ अ = \frac{अन}{अप}$, $कोज्या\ (१८० + अ) = \frac{अन_१}{अप_१}$

यहां $अन = -अन_१$

इसलिये कोज्या (१८० + अ) = – कोज्या अ ।

ऊपर के लिखे से यह भी ज्ञात होता है कि

$$स्पर्श\ (१८० + अ) = \frac{ज्या\ (१८० + अ)}{कोज्य\ (१८० + अ)} = \frac{-ज्या\ अ}{-कोज्या\ अ} = स्पर्श\ अ$$

$$कोस्पर्श\ (१८० + अ) = \frac{१}{स्पर्श\ (१८० + अ)} = \frac{१}{स्पर्श\ अ} = कोस्पर्श\ अ$$

$$छेद\ (१८० + अ) = \frac{१}{कोज्या\ (१८० + अ)} = \frac{१}{-कोज्या\ अ} = -छेद\ अ$$

$$कोछेद\ (१८० + अ) = \frac{१}{ज्या\ (१८० + अ)} = \frac{१}{-ज्या\ अ} = -कोछेद\ अ$$

४७ । यह सिद्ध करना है कि ज्या (९० + अ) = कोज्या अ
और कोज्या (९० + अ) = – ज्या अ

कल्पना करो कि (२० क्षेत्र) पअन अ कोण है, अ बिन्दु से $अप_१$, $कक_१$ के ऊपर की ओर ऐसी रेखा खींचो कि $पअप_१$ एक समकोण के तुल्य हो । अप में एक बिंदु प लो और पन $कक_१$ पर लम्ब खींचो, $अप_१$ को अप के तुल्य बनाओ और $प_१न_१$ लम्ब खींचो ।

$\angle$ प$_1$अन, प$_1$न$_1$अ त्रिभुज का बाहरी कोण है इसलिये

$\angle$ प$_1$अन = $\angle$ अप$_1$न$_1$ + $\angle$ प$_1$न$_1$अ, प$_1$न$_1$अ एक समकोण है और प$_1$अप भी समकोण है इसलिये $\angle$ पअन अप$_1$न$_1$ के तुल्य है और अनप अन$_1$प$_1$ आपस में तुल्य हैं, अप = अप$_1$ इसलिये अन = प$_1$न$_1$ और पन = अन$_1$ । यहां अन और प$_1$न$_1$ का एकही चिह्न है अर्थात + अन = + प$_1$न$_1$ पर अन$_1$ और पन का भिन्न चिह्न है इसलिये पन = − अन$_1$ ।

$$\text{ज्या}\ (\text{अ} + ९०) = \frac{\text{प}_1\text{न}_1}{\text{अप}_1},\ \text{कोज्या अ} = \frac{\text{अन}}{\text{अप}}$$

पर प$_1$न$_1$ = अन और अप = अप$_1$

$\therefore$ ज्या (अ + ९०) = कोज्या अ

$$\text{कोज्या}\ (९० + \text{अ}) = \frac{\text{अन}_1}{\text{अप}_1},\ \text{ज्या अ} = \frac{\text{पन}}{\text{अप}}$$

पर अन$_1$ = − पन

इसलिये कोज्या (९० + अ) = − ज्या अ

४८ । इस अध्याय में संबंध सिद्ध करने में कोण अ को ९० से न्यून लिया है पर अ चाहे कितनाही बड़ा हो परन्तु सब संबंध ठीक होंगे । इस के प्रमाण के लिये यदि अ को एक समकोण से अधिक अथवा ऋण कोण लेकर क्षेत्र बनावें तो ऊपर की रीति के अनुसार पूर्वोक्त संबंध सिद्ध कर सकते हैं ।

४९ । यह जानना है कि ज्यों ज्यों कोई कोण 0° से ३६०° तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों उस कोण की ज्या के चिह्न और परिमाण में क्या भेद होता जाता है

कल्पना करो (२१ क्षेत्र) कि कक$_1$ एक स्थित रेखा है और अप एक घूमनेवाली रेखा है जो घूमने से कक$_1$ के साथ कोण बनाती है ।

यह भी कल्पना करो कि अप एक निश्चित लंबाई की रेखा है और इसके घूमने से एक वृत्त कखक$_{१}$ख$_{१}$ बनता है जिसका केन्द्र अ है, प से कक$_{१}$ रेखा पर पन लंब खींचो और कल्पना करो कि इसकी लंबाई प है, अन को न के तुल्य समझो और अप को र जानो ।

$$\text{तो ज्या पअक} = \frac{\text{पन}}{\text{अप}}$$

पहिले चतुर्थांश में

$$\text{ज्या अ} = \frac{\text{पन}}{\text{अप}} = \frac{+\text{प}}{\text{र}}$$

इसलिये जब तक कोण पहिले चक्रचतुर्थांश में है तब तक ज्या अ धन है ।

जब अ = 0 अर्थात जब अप और अन मिलती हैं तब पन = 0

$$\text{इसलिये ज्या } (0) = \frac{0}{\text{र}} = 0$$

ज्यों ज्यों अ कोण बढ़ता जाता है अर्थात अप घूमती जाती है त्यों त्यों प बढ़ता जाता है और जब अप रेखा अख से मिलती है अर्थात जब कोण ९० अंश का होता है तब अप और पन अख पर मिलती हैं

$$\text{इसलिये ज्या ९०} = \frac{\text{अप}}{\text{अप}} = \text{१}$$

इसलिये ज्यों ज्यों कोण 0 से ९०° तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों उस कोण की ज्या ० से १ तक बढ़ती जाती है और सर्वदा उसके पूर्व + चिह्न रहता है ।

<u>२ चक्रचतुर्थांश</u>

$$\text{इसमें ज्या अ} = \frac{+\text{प}}{\text{र}}$$

इसलिये दूसरे चक्रचतुर्थांश में कोण की ज्या + है ज्यों ज्यों अप, अख से अक, की ओर घूमती जाती है प घटता जाता है और न बढ़ता जाता है यहांतक कि जब अप अक, से मिलती है अर्थात अ दो समकोण के तुल्य होजाता है प घट कर शून्य होता है

$$\text{और} \quad \text{ज्या } १८० = \frac{+\text{प}}{\text{र}} = \frac{0}{\text{र}} = 0$$

इसलिये ज्यों ज्यों कोण ९० से १८० तक बढ़ता जाता है कोण की ज्या परिमाण मे १ से ० तक घटती जाती है और उसका चिह्न + रहता है ।

३ चक्रचतुर्थांश ।

$$\text{इसमें ज्या अ} = \frac{-\text{प}}{\text{र}}$$

इसलिये इस चतुर्थांश में कोण की ज्या (–) होती है ज्यों ज्यों अप अक, से अख, की ओर घूमती है प बराबर बढ़ता जाता है और न घटता जाता है यहां तक कि जब अप अख मिल जाती हैं अर्थात अ २७०° हो जाता है तब प = र

$$\text{इसलिये ज्या } २७० = \frac{-\text{प}}{\text{र}} = \frac{-\text{र}}{\text{र}} = -१$$

इसलिये ज्यों ज्यों कोण १८० से २७० तक बढ़ता जाता है ज्या के परिमाण का अंक बढ़ता है पर ऋण होता है ।

४ चक्रचतुर्थांश

$$\text{ज्या अ} = \frac{-\text{प}}{\text{र}}$$

इसलिये इस चतुर्थांश में कोण की ज्या (–) होती है।

ज्यों ज्यों अप अख, से अक की ओर घूमती है प घटता जाता है और न बढ़ता जाता है यहां तक कि जब अप अक से मिल जाती है तो प घटकर शून्य होजाता है ।

$\therefore$ ज्या ३६०° $= -\frac{प}{र} = \frac{0}{र} = 0$

इसलिये कोण ज्यों ज्यों २७०° से ३६०° तक बढ़ता है त्यों त्यों कोण की ज्या का परिमाण अंक में १ से ० तक घटता जाता है और ज्या सर्वदा — रहती है ॥

५० । यह जानना चाहिये कि ज्यों २ कोई कोण ०° से ३६०° तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों उस कोण की कोज्या के चिह्न और परिमाण में क्या भेद होता जाता है ।

(२१ क्षेत्र में)

$$कोज्या\ अ = \frac{अन}{अप} = \frac{न}{र}$$

पहिले चक्रचतुर्थांश में

$$कोज्या\ अ = +\frac{न}{र}$$

इसलिये इस चतुर्थांश में कोण की कोज्या धन होती है

जब अ = ० अर्थात जब अप और अक मिलती हैं तब न = र और

इसलिये कोज्या ० $= +\frac{न}{र} = \frac{र}{र} = १$

ज्यों ज्यों अ बढ़ता जाता है त्यों त्यों न घटता जाता है और इसलिये $\frac{न}{र}$ घटता जाता है यहां तक कि जब अप और अख मिलती हैं अर्थात जब कोण ९०° होता है तब न घटकर शून्य होजाता है और इसलिये

कोज्या ९० $= \frac{0}{र} = 0$

इसलिये ज्यों ज्यों कोण ०° से ९०° तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों उस

कोण की कोज्या १ से ० तक घटती जाती है और सर्वदा उसके पूर्व धन का चिह्न रहता है ॥

दूसरे चतुर्थांश में

$$\text{कोज्या अ} = -\frac{\text{न}}{\text{र}}$$

इसलिये इस चतुर्थांश में कोज्या ऋण होती है ।

ज्यों ज्यों कोण बढ़ता है अर्थात अप रेखा इस चतुर्थांश में घूमती है न की लंबाई बढ़ती जाती है परंतु इसके पूर्व (–) का चिह्न है यहां तक कि जब अप और अक$_1$ मिलजाती हैं अर्थात जब अ. १८०° होजाता है, तब न अप अर्थात र के तुल्य होजाता है

$$\text{इसलिये कोज्या १८०} = -\frac{\text{न}}{\text{र}} = -\frac{\text{र}}{\text{र}} = -१$$

इसलिये ज्यों ज्यों कोण ९०° से १८०° तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों कोण की कोज्या अंक में ० से – १ तक बढ़ती जाती है परंतु सर्वदा ऋण रहती है ॥

तीसरे चतुर्थांश में

$$\text{कोज्या अ} = -\frac{\text{न}}{\text{र}}$$

इसलिये इस चतुर्थांश में कोण की कोज्या ऋण होती है, ज्यों ज्यों कोण बढ़ता है अर्थात अप अख$_1$ की ओर घूमती है न की लंबाई न्यून होती जाती है यहां तक कि जब अप और अख$_1$ मिलजाती हैं अर्थात कोण २७०° होता है तब न शून्य होजाता है

$$\text{इसलिये कोज्या २७०} = \frac{0}{\text{र}} = 0$$

इसलिये कोण ज्यों ज्यों १८०° से २७०° तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों कोज्या अंक में –१ से ० तक घटती जाती है और सर्वदा ऋण रहती है ॥

चौथे वक्रचतुर्थांश में

$$\text{कोज्या अ} = +\frac{\text{न}}{\text{र}}$$

इसलिये इस चतुर्थांश में कोज्या + रहती है; ज्यों ज्यों कोण बढ़ता है अर्थात अप अक की ओर घूमती जाती है न बढ़ता जाता है यहां तक कि जब अप और अक मिल जाती हैं तब न = र

$$\therefore \text{कोज्या } ३६०^\circ = +\frac{\text{न}}{\text{र}} = \frac{\text{र}}{\text{र}} = १$$

इसलिये ज्यों ज्यों कोण २७०° से ३६०° तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों कोज्या ० से १ तक बढ़ती जाती है और सर्वदा धन रहती है ॥

५१ । यह जानना है कि ज्यों ज्यों कोई कोण ०° से ३६०° तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों उसकी स्पर्शरेखा के चिह्न और परिमाण में क्या भेद होता जाता है ।

१ वक्रचतुर्थांश में

$$\text{स्पर्शरे अ} = \frac{\text{पन}}{\text{अन}} = \frac{+\text{प}}{+\text{न}}$$

इसलिये कोण की स्पर्शरेखा धन है

जब अप और अक मिली रहती हैं अर्थात अ शून्य है तब प शून्य के तुल्य है और अन अप अर्थात र के तुल्य है

$$\text{इसलिये स्पर्शे } ० = \frac{०}{+\text{न}} = ०$$

ज्यों ज्यों कोण ० से ९० तक बढ़ता जाता है अर्थात अप अक की ओर घूमती जाती है प बढ़ता जाता है और न घटता जाता है इसलिये $\frac{+\text{प}}{+\text{न}}$ बढ़ता जाता है यहां तक कि जब अप अख से मिलती है अर्थात अ ९०° होजाता है तब न शून्य होता है

इसलिये स्पर्श ९० $= +\dfrac{\text{प}}{0} = \infty$

जब किसी संख्या को दूसरी संख्या से भाग देते हैं तो ज्यों ज्यों भाजक को घटाते हैं त्यों त्यों उत्तर बढ़ता जाता है यहांतक कि यदि इसको बहुत छोटी संख्या लें तो लब्धि बहुत बड़ी संख्या होगी इसे अनन्त संख्या कहेंगे और इससे अभिप्राय यह है कि यह संख्या इतनी बड़ी है कि उसको किसी नियत अंक से नहीं लिख सकते ।

इसलिये ज्यों ज्यों कोण $0°$ से $९0°$ तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों स्पर्श-रेखा 0 से ∞ तक बढ़ती जाती है और सर्वदा + रहती है ।

२ चक्रचतुर्थांश में स्पर्श अ $= \dfrac{+\text{प}}{-\text{न}}$

इसलिये इस चतुर्थांश में कोण की स्पर्शरेखा ऋण होती है ।

ज्यों ज्यों कोण बढ़ता जाता है अर्थात अप अक की ओर घूमती जाती है प की लंबाई घटती जाती है और न की लंबाई बढ़ती जाती है यहां तक कि जब अप और अक मिलजाती हैं अर्थात जब अ $१८0°$ होजाता है तब प शून्य होजाता है और न अख के तुल्य होता है

इसलिये स्पर्श $१८0° = \dfrac{0}{\text{न}} = 0$

इसलिये ज्यों ज्यों कोण $९0°$ से $१८0°$ तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों उसकी स्पर्शरेखा ∞ से 0 तक घटती जाती है और सर्वदा − होती है ।

३ चक्रचतुर्थांश में

$$\text{स्पर्श अ} = \frac{-\text{प}}{-\text{न}} = \frac{\text{प}}{\text{न}}$$

इसलिये इस चतुर्थांश में स्पर्शरेखा + होती है । ज्यों ज्यों कोण बढ़ता है अर्थात् अप अक_1 से अख_1 की ओर घूमती है प बढ़ता जाता है और

न घटता जाता है यहां तक कि जब अप और अख$_1$ मिलजाती है अर्थात कोण २७०° का होता है तब न शून्य होता है

इसलिये स्पर्श २७० $= \frac{प}{0} = \infty$

इसलिये ज्यों ज्यों कोण १८०° से २७०° तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों स्पर्शरेखा 0 से ∞ तक बढ़ती जाती है और + रहती है।

४ चक्रचतुर्थांश में

$$स्पर्श\ अ = -\frac{प}{न}$$

इसलिये इस चतुर्थांश में स्पर्शरेखा − होती है। ज्यों ज्यों कोण बढ़ता जाता है अर्थात अप अख$_1$ से अक की ओर जाती है प की लंबाई घटती जाती है और न बढ़ता जाता है यहां तक कि जब अप और अक मिलजाती हैं अर्थात कोण ३६० अंश का होता है प शून्य होजाता है और न अप के तुल्य होता है

इसलिये स्पर्श ३६० $= -\frac{प}{न} = \frac{0}{न} = 0$

इसलिये ज्यों ज्यों कोण २७०° से ३६०° तक बढ़ता जाता है त्यों त्यों स्पर्शरेखा ∞ से 0 तक घटती जाती है और (−) रहती है॥

५२। इसी प्रकार से जो भेद कोण की कोटिस्पर्शरेखा छेदनरेखा और कोटिछेदनरेखा में होता है ज्यों ज्यों कोण 0 से ३६० तक बढ़ता है जान सक्ते हैं पर और प्रकार से भी यही बात जानसक्ते हैं क्योंकि

छेदनरे अ $= \frac{1}{कोज्या\ अ}$ इत्यादि इसलिये जब कोज्या इत्यादि का भेद जानते हैं तब छेदनरेखा आदि का जानसक्ते हैं॥

५३। यह जानना है कि ज्यों ज्यों कोण 0° से ३६०° तक बढ़ता है त्यों त्यों उसकी छेदनरेखा के चिह्न और परिमाण में क्या भेद होता जाता है।

$$\text{छेदरे अ} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}}$$

ज्यों ज्यों कोण ० से ९० तक बढ़ता है कोज्या १ से ० तक घटती है और धन रहती है इसलिये छेदरे $\frac{१}{१}$ से $\frac{१}{०}$ तक अर्थात १ से ∞ तक बढ़ती है और + रहती है ।

ज्यों ज्यों कोण ९०° से १८०° तक बढ़ता है कोज्या ० से अंक में –१ तक बढ़ती है और ऋण रहती है इसलिये छेदनरेखा ऋण है और ∞ से –१ तक घटती है ।

ज्यों ज्यों कोण १८०° से २७०° तक बढ़ता है कोज्या अंक में –१ से ० तक घटती है और ऋण है इसलिये छेदनरेखा ऋण है और अंक में –१ से ∞ तक बढ़ती है ।

ज्यों ज्यों कोण २७०° से ३६०° तक बढ़ता है कोज्या धन रहती है और ० से १ तक बढ़ती है इसलिये छेदनरेखा धन है और ∞ से १ तक घटती है ॥

५४ । उत्क्रमज्या अ = १– कोज्या अ

∴ ज्यों ज्यों अ ० से १८०° तक बढ़ता है

उत्क्रमज्या १–१ से १ + १ अर्थात ० से २ तक बढ़ती है ।

इसी प्रकार ज्यों ज्यों कोण १८०° से ३६०° तक बढ़ता है उत्क्रमज्या २ से ० तक घटती जाती है ॥

५५ । नीचे लिखी हुई सारणी से कोण के त्रिकोणमितीय संबंधों में उसके बढ़ने से जो भेद होता स्पष्ट ज्ञान पड़ेगा ।

	०°......९०°	९०°...१८०°	१८०°...२७०°	२७०°...३६०°
ज्या	धन ० ... . १	धन १ ... ... ०	ऋण ०... ..−१	ऋण −१... .०
कोज्या	धन १ .. .. ०	ऋण ०... ...−१	ऋण −१... ...०	धन ० .. ... १
स्पर्शरेखा	धन ० ... .. ∞	ऋण ∞ ०	धन ० ... ... ∞	ऋण ∞ ०
कोटिस्पर्शरेखा	धन ∞ ०	ऋण ० ... ... ∞	धन ∞ ०	ऋण ० .. .. ∞
छेदनरेखा	धन १ .. .. ∞	ऋण ∞ ...... −१	ऋण −१...... ∞	धन ∞ १
कोटिछेदनरेखा	धन ∞ १	धन १ ... ... ∞	ऋण ∞ ... −१	ऋण −१...... ∞
उत्क्रमज्या	धन ० ... .. १	धन १ ... ... २	धन २ ... ... १	धन १ ... ... ०

उदाहरण ।

१ । ३४८०° के त्रिकोणमितीय सम्बन्धों को निकालो ।

३४८० = ९ × ३६० + २४०

इसलिये ३४८०° के त्रि· स· २४०° के संबंध के तुल्य होंगे ॥

अब ज्या २४० = ज्या (१८० + ६०) = − ज्या ६० = $-\frac{\sqrt{३}}{२}$

कोज्या २४०° = कोज्या (१८० + ६०) = − कोज्या ६० = $-\frac{१}{२}$

स्परे २४० = स्परे (१८० + ६०) = + स्परे ६० = $\sqrt{३}$

२ । यह जानना है कि ज्यों ज्यों य, ० से π तक बढ़ता जायगा त्यों त्यों ज्या (π कोज्या य) के चिह्न और परिमाण में क्या भेद होगा ॥

कोज्या य एक से अधिक कभी नहीं होती इसलिये जब कोज्या य धन होगी तब ज्या (π कोज्या य) धन होगी और जब यह ऋण होगी तब ज्या (π कोज्याय) भी ऋण होगी इसलिये पहिले चक्रचतुर्थांश में ज्या (π कोज्याय) धन होगी और दूसरे में ऋण ॥

जब य = 0, ज्या (π कोज्याय) = ज्या π = 0 ज्यों ज्यों य बढ़ता है, π कोज्या य घटती है, इस कारण ज्या (π कोज्याय) बढ़ती जाती है यहांतक कि जब य = ६० तब ज्या (π कोज्याय) = १; य = ६० से य = ९० तक ज्या (π कोज्याय) परिमाण में घटती जाती है और जब य = ९० तब यह शून्य है।

इसीप्रकार से, य = ९० से य = १२० तक इसका परिमाण बढ़ता जाता है और जब य = १२०° तब ज्या (π कोज्याय) = −१

य = १२० से य = १८०° तक इसका परिमाण घटता जाता है और जब य = 0 तब यह भी = 0 ॥

३। ३००°, ४२०°, और ७५०° के त्रिकोणमितीय संबंधों को निकालो।

४। ३६९०° का त्रि॰ सं॰ निकालो।

५। १८४५० का त्रि॰ सं॰ निकालो।

६। 0° और १२००° के बीच में कौन कौन ऐसे कोण हैं जिनकी स्पर्शरेखा − १ ?

७। $\left(\frac{३\pi}{२} + \text{य}\right)$ की ज्या और स्पर्शरेखा कोज्या य और कोस्प य की राशि में निकालो।

८। सिद्ध करो कि

उत्क्रमज्या (२ नπ + य) + उत्क्रमज्या $\{$(२ न + १)π − य$\}$ = २

९। यदि ज्याय = $\frac{३}{५}$ तो (म + $\frac{१}{२}$) π − य के त्रि॰ संबंधों को निकालो।

१०। ज्या $\left(\frac{\text{न}\,\pi}{२} + (-१)^{\text{न}}\frac{\pi}{६}\right)$ किसके तुल्य है?

यदि य 0° से ३६०° तक बढ़ता जावे तो नीचे लिखे के चिह्न और परिमाण में क्या भेद होता जावेगा?

११। ज्या य + कोज्या य

१२। ज्या य × कोज्या य

१३। स्परे २य

१४। $\frac{\text{कोज्या २ य}}{\text{कोज्या य}}$

१५। स्परे य + कोस्परे य

१६। स्परे π (१ − कोज्या य)

अध्याय ४

५६ । एक ऐसा कोण बनाना है जिसकी ज्या अथवा कोज्या एक दियी हुई संख्या के तुल्य है ।

दियी हुई संख्या १ से अधिक नहीं हो सकती क्योंकि किसी कोण की ज्या अथवा कोटिज्या १ से अधिक कभी नहीं हो सकती ।

कल्पना करो कि $\frac{\text{क}}{\text{ख}}$ दियी हुई संख्या १ से न्यून है ।

अक एक ऐसी रेखा लो (२२ क्षेत्र) जिस की लम्बाई माप के ख प्रमाण के तुल्य है इस रेखा को व्यास मान कर एक वृत्त खींचो और उस में अ विन्दु को केन्द्र मान कर क प्रमाण की दूरी पर एक और वृत्त खींचो और यह कल्पना करो कि यह वृत्त पहिले को ख विन्दु में काटता है कख मिला दो

क्योंकि ∠ अखक वृत्तार्द्ध में का कोण है इसलिये यह समकोण है

इसलिये

$$\text{ज्या खकअ} = \frac{\text{अख}}{\text{अक}} = \frac{\text{क}}{\text{ख}}$$

$$\text{कोज्या कअख} = \frac{\text{अख}}{\text{अक}} = \frac{\text{क}}{\text{ख}}$$

इसलिये खकअ और कअख आकांक्षित कोण बनाये गये हैं ॥

५७ । एक ऐसा कोण बनाना है जिस की स्पर्शरेखा या कोटि स्पर्शरेखा एक दियी हुई संख्या के तुल्य है ।

कल्पना करो कि $\frac{\text{क}}{\text{ख}}$ दियी हुई संख्या है

एक ऐसी रेखा अक लो (२३ क्षेत्र) जिस की लम्बाई लम्बाई के ख प्रमाण के तुल्य हो

ह

$-(२म+१)\pi - अ, \; -२(म+१)\pi + अ$

अब इन चारों में यह देखते हैं कि २ म π, चाहे म सम हो या विषम हो सर्वदा सम होगा (२ म + १) सर्वदा विषम होगा, और २ (म + १) सम होगा चाहे म सम हो वा विषम हो। यदि इन चारों सूत्रबीजों का पूर्व्वार्द्ध लें तो दो में π के पूर्व्व विषम और दो में सम अंक होगा इसलिये यदि म लिखें तो (क्योंकि म सम और विषम दोनों हो सकता है) इससे चारों के पूर्व्वार्द्ध समझे जायंगे, यह भी जाना है कि दो सूत्रबीज में पूर्वार्द्ध के आगे (–) और दो में + धन चिह्न है इसलिये म π लिखने से धन वा ऋण जो चाहें सो समझ सकते हैं क्योंकि म धन और ऋण दोनों हो सकता है। ऊपर के चारों सूत्रबीज के देखने से यह ज्ञात होता है कि जब पूर्व्वार्द्ध सम है तब अ के पूर्व्व (+) का चिह्न है और जब विषम है तब (–) का चिह्न है और यह भी बीजगणित से ज्ञात है कि $+(-१)^{म}$ ऋण १ होगा यदि म विषम है और + १ होगा यदि म सम हो चाहे म धन वा ऋण हो क्योंकि यदि म ऋण हो तो

$$(-१)^{-म} = \frac{१}{(-१)^{म}} = -१ \text{ (यदि म विषम हो) और } \frac{१}{(-१)^{म}}$$

$= +१$ (यदि म सम हो) इसलिये यदि म $\pi + (-१)^{म}$ अ लिखें तो यह समझा जाता है कि यदि म सम हो तो अ का चिह्न धन है और यदि म विषम हो तो अ का चिह्न ऋण है और चारों सूत्रबीजों से भी यही समझा जाता है इसलिये म $\pi + (-१)^{म}$ अ के लिखने से वे सब कोण समझे जाते हैं जो चारों सूत्रबीज में हैं परन्तु इन चार सूत्रबीज में वे सब कोण हैं जिनकी ज्या दियी हुई संख्या के तुल्य है और इन को छोड़कर कोई ऐसे भी कोण नहीं हैं जिन की ज्या दियी हुई संख्या के तुल्य हो और उन चारों में न हों इसलिये म $\pi + (-१)^{म}$ अ से वे सब कोण समझे जाते हैं जिनकी ज्या अ की ज्या के तुल्य है और सब कोण जिनकी ज्या अ की ज्या के तुल्य है इसी से समझे जाते हैं॥

६० । उन सब कोणों को जानना है जिनकी कोज्या एक दियी हुई संख्या के तुल्य है ।

कल्पना करो कि (२४ क्षेत्र) पअन उन कोणों में जिनकी कोज्या किसी दियी हुई संख्या के तुल्य है सब से छोटा धन कोण है कल्पना करो कि इसका चक्रीय मान अ है।

कअप₁ कोण कअप कोण के तुल्य बनाओ तो कअप₁ कोण (जो १८०° से बड़ा है) की कोज्या कअप की कोज्या के तुल्य है क्योंकि कोज्या

पअक $= \frac{\text{अन}}{\text{अप}}$, और कोज्या कअप₁ $= \frac{\text{अन}_1}{\text{अप}_1}$, परन्तु अन : अन₁ :: अप : अप₁

इसलिये कोज्या पअक = कोज्या प₁अक, यदि अप घूमकर फिर अप अथवा अप₁ के स्थान पर आवे तो जो कोण बनते हैं उन की कोज्या भी दियी हुई संख्या के तुल्य होगी इस प्रकार से क्षेत्र से स्पष्ट है कि वे सब धन कोण जिनकी कोज्या दियी हुई संख्या के तुल्य है ये हैं अ, $२\pi -$ अ और इन कोणों में २π को किसी पूरे अंक के गुणने से जो मिले उसके जोड़ने से जितने कोण बनते हैं। इसलिये वे सब धन कोण जिनकी कोज्या दियी हुई संख्या के तुल्य है $२म\pi +$ अ और $२म\pi + २\pi -$ अ के लिखने से समझे जाते हैं जहां कि म शून्य वा कोई धन पूरा अंक है।

अब यदि यह कल्पना करें कि अप अक के नीचे की ओर घूमती है तो यह ज्ञात पड़ता है कि − अ और − ($२\pi -$ अ) की भी कोज्या दियी हुई संख्या के तुल्य है। और उन ऋण कोणों की कोज्या भी दियी हुई संख्या के तुल्य होगी जो इन कोणों में २π के किसी गुना के जोड़ने से बनते हैं इसलिये नीचे लिखे हुए सूत्रबीजों से वे सब ऋण कोण जिनकी कोज्या दियी हुई संख्या के तुल्य है समझे जाते हैं

$- २म\pi -$ अ और $- २\pi म - (२\pi -$ अ$)$ जहां म ० अथवा १ २ ३ ⋯ कोई पूरी धन संख्या है।

इसलिये इस चार से वे सब कोण समझे जाते हैं जिनकी कोज्या दियी हुई संख्या के तुल्य है, $२म\pi +$ अ, $२म\pi + २\pi -$ अ, $- २म\pi -$ अ, $- २म\pi - (२\pi -$ अ$)$ अथवा

२मπ + अ, २(म + १)π − अ, −२मπ − अ, −२(म + १)π + अ

अब यहां यह देखते हैं कि म चाहे सम हो चाहे विषम हो पर २म सर्वदा सम होगा यहां यदि २मπ लिखें तो यदि म ० हो अथवा धन वा ऋण पूरी संख्या हो तो २मπ से २मπ, २(म + १)π, −२मπ और (म + १)π सब समझे जासकते हैं और ऊपर के चारों सूत्रबीज में दो में अ ऋण है और दो में धन है इसलिये ± अ लिखने से दोनों समझे जासकते हैं। इसलिये २मπ ± अ लिखने से वे सब कोण समझे जाते हैं जो चारों सूत्रबीज से समझे जाते हैं परन्तु इन चार से केवल वेही समझे जाते हैं जिनकी कोज्या दियी हुई संख्या के तुल्य है और कोई ऐसे भी कोण नहीं हैं जिनकी कोज्या दिये हुए अंक के तुल्य हो परन्तु वे इनसे न समझे जाते हों इसलिये वे सब कोण जिनकी कोज्या दियी हुई संख्या के तुल्य है २मπ ± अ से समझे जाते हैं॥

६१। उन सब कोणों को जानना है जिनकी स्पर्शरेखा एक दियी हुई संख्या के तुल्य है॥

कल्पना करो (२६ क्षेत्र) कि उन सब कोणों में जिनकी स्पर्शरेखा दियी हुई संख्या के तुल्य है नअप सब से छोटा है और कल्पना करो कि इसका चक्रीय माप अ है॥

अब इस क्षेत्र में नअप और न१अप१ की स्पर्शरेखा एकही है क्योंकि स्पर अ = स्पर (१८० − अ)

यदि अप फिर घूमकर अप अथवा अप१ के स्थान पर आवे तो ऐसे घूमने से जो कोण बनेंगे उनकी स्पर्शरेखा भी दियी हुई संख्या के तुल्य होगी। इसी प्रकार से यह स्पष्ट है कि वे सब धन कोण जिनकी स्पर्शरेखा दियी हुई संख्या के तुल्य है ये हैं अर्थात अ, π + अ और इन में चार समकोण के किसी अपवर्त्य के जोड़ने से जो कोण बनते हैं। इसलिये वे सब धन कोण जिनकी स्पर्शरेखा दियी हुई संख्या के तुल्य है २मπ + अ, और २मπ + π + अ के लिखने से समझे जाते हैं जहां कि म शून्य वा कोई धन पूर्ण अंक है॥

सरल... ...क के नीचे की ओर घूमती

अब यदि यह कल्पना करें कि चाप ... अ), −(२π − अ) की है तो क्षेत्र से यह जान पड़ता है कि −(π− ... के जोड़ने से बनते और उन कोणों की जो इनमें २π के किसी अपवर्त्य ... म − π + अ हैं स्पर्शरेखा दियी हुई संख्या के तुल्य है इसलिये −२ ... स्पर्श-और −२मπ − π + अ से वे सब कोण समझे जाते हैं जिनकी ... रेखा दियी हुई संख्या के तुल्य है जब कि म शून्य अथवा और ... पूर्ण धन संख्या है इसलिये

२मπ + अ, २मπ + π + अ, −२मπ −(π − अ),

२मπ − (२π − अ) अथवा २मπ + अ, (२म + १)π + अ, −(२म + १)π + अ, २(म + १) + अ से वे कोण समझे जाते हैं जिनकी स्पर्शरेखा दियी हुई संख्या के तुल्य है। अब इनके देखने से यह जान पड़ता है कि २म और −२(म + १) सम हैं और (२म + १) और −(२म + १) विषम हैं और अ के पूर्व सर्वदा धन का चिह्न है इसलिये मπ + अ लिखने से वे सब कोण समझे जाते हैं जो ऊपर के चार मूलबीजों से समझे जाते हैं, परन्तु इन चार से केवल वेही समझे जाते हैं जिनकी स्पर्शरेखा दियी हुई संख्या के तुल्य है और कोई ऐसे और भी कोण नहीं हैं जिनकी स्पर्शरेखा दियी हुई संख्या के तुल्य हो और वे इनसे न समझे जाते हों इसलिये वे सब कोण जिनकी स्पर्शरेखा दियी हुई संख्या के तुल्य है मπ + अ से समझे जाते हैं ॥

६२। यदि उन सब कोणों को जानना हो जिनकी कोटिच्छेदनरेखा एक दियी हुई संख्या के तुल्य है तो इस प्रकार से जानेंगे ॥

कल्पना करो कि सब से छोटे धन कोण का जिसकी कोटिच्छेदनरेखा दियी हुई संख्या के तुल्य है चक्रीयमाप अ है

$$\text{तो कोटिछे अ} = \frac{१}{\text{ज्या अ}}$$

परन्तु वे सब कोण जिनकी ज्या अ की ज्या के तुल्य है $\{म\pi + (-१)^{म} अ\}$ से समझे जाते हैं

इसलिये वे सब कोण जिनकी कोटिच्छेदनरेखा दियी हुई संख्या के तुल्य है $\frac{१}{ज्या \{न \pi + (-१)^{म} अ\}}$ से समझे जायंगे इसलिये

$$कोटिच्छे \{न \pi + (-१)^{म} अ\} = कोटिछे\ अ$$

इसी प्रकार से

$$छेरे \{२ न \pi \pm अ\} = छेरे\ अ$$

और $कोस्प \{न \pi + अ\} = कोस्प\ अ$

उदाहरण ।

१ । $ज्या\ य = \frac{१}{\sqrt{२}}$ में य का मान निकालो

$$य = \frac{\pi}{४}$$

पर उन सब कोणों के लिये जिनकी ज्या ज है

$म \pi + (-१)^{म} ज$ लिख सकते हैं

इसलिये $य = म \pi + (-१)^{म} \frac{\pi}{४}$ उत्तर

२ । यदि $स्प (\pi कोस्प\ य) = कोस्प (\pi स्प\ य)$ तो यह सिद्ध करना है कि $स्प\ य = \frac{२न+१}{२} \pm \frac{\sqrt{(४न^{२}+४न-१५)}}{४}$ जहां पर न कोई पूर्णांक है

क्योंकि $स्प (\pi कोस्प\ य) = कोस्प (\pi स्प\ य)$

इसलिये $स्प (\pi कोस्प\ य) = स्प (\frac{\pi}{२} - \pi स्प\ य)$

न π + प से वे सब कोण समझे जाते हैं जिनकी स्पर्शरेखा प की स्पर्शरेखा के तुल्य है इसलिये पिछले समीकरण में य का मान निकालने में इस प्रकार से लिखेंगे

$$\pi\ \text{कोस्प य} = \text{न}\ \pi + \frac{\pi}{२} - \pi\ \text{स्प य}$$

$$\text{स्प}^{२}\text{य} - \frac{२\text{न} + १}{२}\ \text{स्प य} = -१$$

इस से $\text{स्प य} = \dfrac{२\text{न}+१}{४} \pm \dfrac{\sqrt{(४\text{न}^{२}+४\text{न}-१५)}}{४}$

इन समीकरणों में से य का मान निकालो

३। $\text{ज्या}^{२}\text{ य} = \frac{१}{४}$

४। $\text{स्परे य} = -१$

५। $\text{छेरे य} = २\ \text{स्परे य}$

६। $\text{ज्या य} = \text{कोज्या ३य}$

७। $\dfrac{२}{\text{ज्या य}} - \text{कोस्प य} = \sqrt{३}$

८। $\text{ज्या}^{२}\text{ य} = \frac{३}{२}\ \text{कोज्या य}$

९। $\text{ज्या}^{२}\text{ य} = \text{ज्या}^{२}\text{ क}$

१०। यह सिद्ध करो कि वे सब कोण जिनकी ज्या, क की ज्या के तुल्य है, म π + क कोज्या म π से समझे जासकते हैं।

११। उन कोणों को निकालो जिनकी ज्या, − ज्याय के तुल्य हो।

कल्पना करो कि कअख,क कोण है (२८ क्षेत्र) और खअग,ख है अग में एक बिन्दु प लो और प से अक और अख पर पफ और पब लम्ब गिराओ और बभ, बम अक और पफ पर लंब खींचो तो

$$\text{ज्या}\ (\text{क} - \text{ख}) = \frac{\text{पफ}}{\text{अप}} = \frac{\text{बभ} - \text{बम}}{\text{अप}} =$$

$$\frac{\text{बभ}}{\text{अब}} \cdot \frac{\text{अब}}{\text{अप}} - \frac{\text{बम}}{\text{पब}} \cdot \frac{\text{पब}}{\text{अप}} =$$

ज्या क कोज्या ख − कोज्या क ज्या ख

$$\text{कोज्या}\ (\text{क} - \text{ख}) = \frac{\text{अफ}}{\text{अप}} = \frac{\text{अभ} + \text{मप}}{\text{अप}}$$

$$\frac{\text{अभ}}{\text{अब}} \cdot \frac{\text{अब}}{\text{अप}} + \frac{\text{मप}}{\text{पब}} \cdot \frac{\text{पब}}{\text{अप}} =$$

कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख

३०। $$\text{स्पर्श}\ (\text{क} - \text{ख}) = \frac{\text{पफ}}{\text{अफ}} = \frac{\text{बभ} - \text{मब}}{\text{अभ} + \text{भफ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{बभ}}{\text{अभ}} - \dfrac{\text{मब}}{\text{अभ}}}{1 + \dfrac{\text{भफ}}{\text{अभ}}} = \frac{\dfrac{\text{बभ}}{\text{अभ}} - \dfrac{\text{मब}}{\text{बभ}} \cdot \dfrac{\text{बभ}}{\text{अभ}}}{1 + \dfrac{\text{मप}}{\text{बभ}} \cdot \dfrac{\text{बभ}}{\text{अभ}}}$$

परन्तु $\frac{\text{मब}}{\text{बभ}} = \frac{\text{बप}}{\text{अब}} =$ स्पर्श ख

और $\frac{\text{बभ}}{\text{अभ}} =$ स्पर्श क

$$\text{इसलिये स्पर्श}\ (\text{क} - \text{ख}) = \frac{\text{स्पर्श क} - \text{स्पर्श ख}}{1 + \text{स्पर्श क स्पर्श ख}}$$

७१ । $\text{कोस्परे}\ (\text{क}+\text{ख}) = \dfrac{\text{कोज्या}\ (\text{क}+\text{ख})}{\text{ज्या}\ (\text{क}+\text{ख})}$

$$= \frac{\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}}{\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{कोज्या क कोज्या ख}}{\text{ज्या क ज्या ख}} - 1}{\dfrac{\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या ख}} + \dfrac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या क}}} = \frac{\text{कोस्परे क कोस्परे ख} - 1}{\text{कोस्परे ख} + \text{कोस्परे क}}$$

७२ । यदि क = ख तब

$$\text{कोस्परे २ क} = \frac{\text{कोस्प}^{2}\ \text{क} - 1}{\text{२ कोस्प क}}$$

७३ । $\text{कोस्परे}\ (\text{क}-\text{ख}) = \dfrac{\text{कोज्या}\ (\text{क}-\text{ख})}{\text{ज्या}\ (\text{क}-\text{ख})}$

$$= \frac{\text{कोज्या क कोज्या ख} + \text{ज्या क ज्या ख}}{\text{ज्या क कोज्या ख} - \text{कोज्या क ज्या ख}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{कोज्या क कोज्या ख}}{\text{ज्या क ज्या ख}} + 1}{\dfrac{\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या ख}} - \dfrac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या क}}}$$

$$= \frac{\text{कोस्परे क कोस्परे ख} + 1}{\text{कोस्परे ख} - \text{कोस्परे क}}$$

७४ । ज्या (क + ख) और ज्या (क − ख) को ख और क की ज्या और कोज्या की राशि में निकालने के लिये क को और ख को एक एक समकोण से न्यून समझा है पर यह अवश्य नहीं है यदि क और ख एक एक समकोण से बड़े हों तो उचित क्षेत्र बनाने से इष्टफल निकाल सकेंगे। उदाहरण के लिये कल्पना करो कि क और ख प्रत्येक एक समकोण से न्यून हैं पर उनका योग एक समकोण से अधिक है

इसी प्रकार से

$$\frac{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}}{\text{कोज्या ख} - \text{कोज्या क}} = \text{कोस्प}\,\frac{\text{क} + \text{ख}}{२}\cdot\text{कोस्प}\,\frac{\text{क} - \text{ख}}{२}\cdot \quad (१६)$$

७९ । २ क और $\frac{\text{क}}{२}$ के त्रिकोणमितीय संबन्धों का वर्णन ।

यह सिद्ध होचुका है कि

$$\text{ज्या २क} = \text{२ ज्या क कोज्या क} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (१७)$$

$$\text{कोज्या २क} = १ - २\,\text{ज्या}^{२}\,\text{क}$$

$$= २\,\text{कोज्या}^{२}\,\text{क} - १ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (१८)$$

$$\text{स्पर्श २क} = \frac{\text{२ स्प क}}{१ - \text{स्प}^{२}\,\text{क}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (१९)$$

$$\text{कोस्प २क} = \frac{\text{कोस्प}^{२}\,\text{क} - १}{\text{२ कोस्प क}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (२०)$$

यदि २क के लिये क रक्खें तो

$$\text{ज्या क} = २\,\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{और कोज्या क} = १ - २\,\text{ज्या}^{२}\,\frac{\text{क}}{२}$$

$$= २\,\text{कोज्या}^{२}\,\frac{\text{क}}{२} - १$$

इसलिये

$$२\,\text{ज्या}^{२}\,\frac{\text{क}}{२} = १ - \text{कोज्या क}$$

$$२\,\text{कोज्या}^{२}\,\frac{\text{क}}{२} = १ + \text{कोज्या क}$$

$$\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२} = \pm\sqrt{\left\{\frac{१ - \text{कोज्या क}}{२}\right\}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (२१)$$

$$\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२} = \pm\sqrt{\left\{\frac{१ + \text{कोज्या क}}{२}\right\}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (२२)$$

यहां वर्गमूल चिह्न के पूर्व + और – दोनो हैं इसलिये यदि कोज्या क एक निश्चित संख्या हो तो ज्या $\frac{क}{२}$ और कोज्या $\frac{क}{२}$ के लिये दो दो मान निकलेंगे जिनमें केवल चिह्न का अन्तर होगा इसके कारण का वर्णन करते हैं।

यदि अ कोई ऐसा कोण हो जिसकी कोज्या दियी है तो २ न π ± अ से वे सब कोण समझे जाते हैं जिनकी कोज्या अ की कोज्या के तुल्य है इसलिये यदि किसी पदसमूह से ज्या $\frac{अ}{२}$ का मान कोज्या अ की राशि में निकले तो इससे उन सब कोणों की ज्या का मान निकलेगा जो $\frac{१}{२}$(२ न π ± अ) से समझे जाते हैं

$$ज्या\left(न\pi \pm \frac{अ}{२}\right) = ज्या\,न\pi\,कोज्या\,\frac{अ}{२} \pm कोज्या\,न\pi\,ज्या\,\frac{अ}{२}$$

$$= \pm\,कोज्या\,न\pi\,ज्या\,\frac{अ}{२} = \pm\,ज्या\,\frac{अ}{२}$$

इसलिये दो ऐसे मान निकलते हैं जिनमें केवल चिह्न का अन्तर है।

इसी प्रकार से कोज्या $\frac{क}{२}$ के दो उत्तर का प्रमाण दे सकते हैं॥

८०। यदि ज्या क दियी हो तो ज्या $\frac{क}{२}$ और कोज्या $\frac{क}{२}$ निकालने की रीति।

$$ज्या\,क = २\,ज्या\,\frac{क}{२}\,कोज्या\,\frac{क}{२}$$

$$ज्या^{२}\frac{क}{२} + कोज्या^{२}\frac{क}{२} = १$$

∴ समीकरणों के योग से

$$\left(\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२}+\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२}\right)^{२}=१+\text{ज्या क}$$

पहिले समीकरण को दूसरे में से घटाने से

$$\left(\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२}-\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२}\right)^{२}=१-\text{ज्या क}$$

$$\therefore\ \text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२}+\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२}=\pm\sqrt{(१+\text{ज्या क})}$$

$$\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२}-\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२}=\pm\sqrt{(१-\text{ज्या क})}$$

$$\therefore\ \text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२}=\frac{१}{२}\left\{\pm\sqrt{(१+\text{ज्याक})}\pm\sqrt{(१-\text{ज्याक})}\right\}\cdots(२३)$$

$$\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२}=\frac{१}{२}\left\{\pm\sqrt{(१+\text{ज्या क})}\mp\sqrt{(१-\text{ज्या क})}\right\}\cdots(२४)$$

८१। यहां पर यदि ज्या क एक निश्चित संख्या हो तो ज्या $\frac{\text{क}}{२}$ के ज्याक की राशि में चार उत्तर निकल सकते हैं और कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ के भी चार। इसका हेतु वर्णन करते हैं।

कल्पना करो कि अ उन कोणों में से सब से छोटा कोण है जिनकी ज्या एक दिये हुए अंक के तुल्य है यहां पर यह अंक ज्याक है, वे सब कोण जिनकी ज्या ज्या क के तुल्य है नीचे लिखे से समझे जाते हैं

$$\text{न}\,\pi+(-१)^{\text{न}}\,\text{अ}$$

इसलिये ज्या $\frac{\text{क}}{२}$ और कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ के सब मान ज्या क की राशि में नीचे लिखे से समझे जाते हैं

$$ज्या \left\{\frac{न\pi + (-१)^{न} अ}{२}\right\} और\ कोज्या \left\{\frac{न\pi + (-१)^{न} अ}{२}\right\}$$

यहां पर न सम और विषम दोनो हो सकता है अर्थात न, २ म और २ म + १ के तुल्य हो सकता है ।

पहिले कल्पना करो कि न = २ म

$$ज्या \frac{न\pi + (-१)^{न} अ}{२} = ज्या\left(म\pi + \frac{अ}{२}\right) = \pm ज्या \frac{अ}{२}$$

यदि म सम हो तो + ज्या $\frac{अ}{२}$ उत्तर है और यदि म विषम हो तो

– ज्या $\frac{अ}{२}$ उत्तर है । फिर

$$कोज्या \frac{न\pi + (-१)^{न} अ}{२} = कोज्या\left(म\pi + \frac{अ}{२}\right)$$

$$= \pm कोज्या \frac{अ}{२}$$

अर्थात् जब म सम है तब + उत्तर में आवेगा और जब म विषम है तब – उत्तर में आवेगा ।

अब न को २ म + १ के तुल्य लो

$$ज्या \frac{न\pi + (-१)^{न} अ}{२} = ज्या\left(म\pi + \frac{\pi - अ}{२}\right) = \pm ज्या\left(\frac{\pi}{२} - \frac{अ}{२}\right)$$

$$= \pm कोज्या \frac{अ}{२}$$

$$कोज्या \frac{न\pi + (-१)^{न} अ}{२} = \pm कोज्या\left(\frac{\pi}{२} - \frac{अ}{२}\right) = \pm ज्या \frac{अ}{२}$$

इस लिये ज्या $\frac{क}{२}$ और कोज्या $\frac{क}{२}$ के ज्या क की राशि में चार चार मान होंगे ॥

८२ । ज्या २ क और कोज्या २ क को स्प क की राशि में जानना है ।

$$ज्या\,२क = २\,ज्या\,क\,कोज्या\,क = \frac{२\,ज्या\,क\,कोज्या\,क}{ज्या^२ क + कोज्या^२ क}$$

$$= \frac{\frac{२\,ज्या\,क}{कोज्या\,क}}{१ + \frac{ज्या^२ क}{कोज्या^२ क}} = \frac{२\,स्प\,क}{१ + स्प^२ क} \quad \cdots \cdots \cdots \cdots (२५)$$

इसी प्रकार से

$$कोज्या\,२\,क = \frac{१ - स्प^२ क}{१ + स्प^२ क} \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (२६)$$

८३ । $ज्या\,३\,क = ज्या\,(२\,क + क)$

$$= ज्या\,२\,क\,कोज्या\,क + कोज्या\,२\,क\,ज्या\,क$$

$$= २\,ज्या\,क\,(१ - ज्या^२ क) + (१ - २\,ज्या^२ क)\,ज्या\,क$$

$$= ३\,ज्या\,क - ४\,ज्या^३ क \quad \cdots \cdots \cdots (२७)$$

$$कोज्या\,३\,क = कोज्या\,(२\,क + क)$$

$$= कोज्या\,२\,क\,कोज्या\,क - ज्या\,२\,क\,ज्या\,क$$

$$= (२\,कोज्या^२ क - १)\,कोज्या\,क - २\,कोज्या\,क\,ज्या^२ क$$

$$= (२\,कोज्या^२ क - १)\,कोज्या\,क - २\,कोज्या\,क\,(१ - कोज्या^२ क)$$

$$= ४\,कोज्या^३ क - ३\,कोज्या\,क \quad \cdots \cdots \cdots (२८)$$

$$स्प\,३\,क = \frac{ज्या\,३\,क}{कोज्या\,३\,क} = \frac{३\,ज्या\,क - ४\,ज्या^३ क}{४\,कोज्या^३ क - ३\,कोज्या\,क}$$

$$= \frac{\frac{३\,स्प\,क}{कोज्या^२ क} - ४\,स्प^३ क}{४ - ३ \cdot \frac{१}{कोज्या^२ क}}$$

$$= \frac{३ स्प क (१ + स्प^{२} क) - ४ स्प^{३} क}{४ - ३ (१ + स्प^{२} क)} = \frac{३ स्प क - स्प^{३} क}{१ - ३ स्प^{२} क} \cdots (२९)$$

८४ । १५° के त्रिकोणमितीय संबन्धों को निकालना है ।

$$ज्या १५ = ज्या (४५ - ३०) = ज्या ४५ कोज्या ३० - कोज्या ४५ ज्या ३०$$

$$= \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{\sqrt{३}}{२} - \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{१}{२} = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$$

$$कोज्या १५ = \sqrt{(१ - ज्या^{२} १५)} = \sqrt{\left\{१ - \frac{४ - २\sqrt{३}}{२ \times ४}\right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{२ + \sqrt{३}}{४}\right\}} = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}}$$

$$स्प १५ = \frac{ज्या १५}{कोज्या १५} = \frac{\sqrt{३} - १}{\sqrt{३} + १} = २ - \sqrt{३}$$

$$कोस्प १५ = \frac{१}{२ - \sqrt{३}} = २ + \sqrt{३}$$

$$छे १५ = \frac{१}{कोज्या १५} = \frac{२\sqrt{२}}{\sqrt{३} + १}$$

$$कोछे १५ = \frac{१}{ज्या १५} = \frac{२\sqrt{२}}{\sqrt{३} - १}$$

जब १५° के त्रिकोणमितीय संबन्ध ज्ञात हुए तब ७५° के भी जान सकते हैं क्योंकि ७५, १५ का समकोणावशिष्ट है ।

८५ । १८° के त्रिकोणमितीय संबंधों को निकालो ।

क्योंकि ५४° = ९०° − ३६°

$$\therefore कोज्या ५४ = ज्या ३६$$

$$कोज्या ३ \times १८ = ज्या २ \times १८$$

$$४ कोज्या^{३} १८ - ३ कोज्या १८ = २ ज्या १८ कोज्या १८$$

$$४\ \text{कोज्या}^2\ १८ - ३ = २\ \text{ज्या}\ १८$$

$$१ - ४\ \text{ज्या}^2\ १८ = २\ \text{ज्या}\ १८$$

$$\text{ज्या}^2\ १८ + \frac{१}{२}\ \text{ज्या}\ १८ = \frac{१}{४}$$

$$\text{ज्या}\ १८ = \frac{\pm\sqrt{५} - १}{४}$$

पर ज्या १८ ऋण नहीं होसकती

$$\text{इसलिये ज्या}\ १८ = \frac{\sqrt{५} - १}{४}$$

अब कोज्या १८ और इसके और त्रिकोणमितीय संबन्धों को निकाल सकते हैं ।

८६ । ज्या (क + ख + ग) = ज्या (क + ख) कोज्या ग + कोज्या (क + ख) ज्या ग

= ज्या क कोज्या ख कोज्या ग + ज्या ख कोज्या ग कोज्या क + ज्या ग कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख ज्या ग ... (३०)

कोज्या (क + ख + ग) =

कोज्या (क + ख) कोज्या ग − ज्या (क + ख) ज्या ग

= कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग − कोज्या क ज्या ख ज्या ग − कोज्या ख ज्या क ज्या ग − कोज्या ग ज्या क ज्या ख ... (३१)

$$\text{स्प}\ (\text{क} + \text{ख} + \text{ग}) = \frac{\text{ज्या}\ (\text{क} + \text{ख} + \text{ग})}{\text{कोज्या}\ (\text{क} + \text{ख} + \text{ग})}$$

$$= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख} + \text{स्प ग} - \text{स्प क स्प ख स्प ग}}{१ - \text{स्प क स्प ख} - \text{स्प ख स्प ग} - \text{स्प क स्प ग}} \cdots (३२)$$

८७ । प्रायः उस कोण को जिसकी ज्या, प के तुल्य है इस भांति लिखते हैं ज्या$^{-१}$प इसी प्रकार से यदि कोज्या क = म तो क = कोज्या$^{-१}$म यदि स्प क = भ तो क = स्प$^{-१}$भ ॥

उदाहरण ।

१ । सिद्ध करो कि $\dfrac{\text{कोज्या घ} + \text{ज्या घ}}{\text{कोज्या घ} - \text{ज्या घ}}$* $= \text{स्प २ घ} + \text{छेरे २ घ}$

$$\frac{\text{कोज्या घ} + \text{ज्या घ}}{\text{कोज्या घ} - \text{ज्या घ}} = \frac{\text{कोज्या}^{२}\text{ घ} + \text{ज्या}^{२}\text{ घ} + \text{२ ज्या घ कोज्या घ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{ घ} - \text{ज्या}^{२}\text{ घ}}$$

$$= \frac{\text{१} + \text{ज्या २ घ}}{\text{कोज्या २ घ}} = \text{स्प २ घ} + \text{छेरे २ घ}$$

२ । सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या (क + ख)} + \text{ज्या (क + २ ख)}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या (क + ख)} + \text{कोज्या (क + २ ख)}} = \text{स्प (क + ख)}$$

$$\frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या (क + ख)} + \text{ज्या (क + २ ख)}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या (क + ख)} + \text{कोज्या (क + २ ख)}} =$$

$$\frac{\text{ज्या (क + ख)} + \text{२ ज्या (क + ख) कोज्या ख}}{\text{कोज्या (क + ख)} + \text{२ कोज्या (क + ख) कोज्या ख}} =$$

$$\frac{\text{ज्या (क + ख)} \{\text{१} + \text{२ कोज्या ख}\}}{\text{कोज्या (क + ख)} \{\text{१} + \text{२ कोज्या ख}\}}$$

$$\frac{\text{ज्या (क + ख)}}{\text{कोज्या (क + ख)}} = \text{स्परे (क + ख)}$$

३ । यह सिद्ध करना है कि

$\text{कोज्या ९ क} + \text{३ कोज्या ७ क} + \text{३ कोज्या ५ क} + \text{कोज्या ३ क} =$

$\text{८ कोज्या}^{३}\text{ क कोज्या ६ क}$

$\text{कोज्या ९ क} + \text{कोज्या ३ क} = \text{२ कोज्या ६ क कोज्या ३ क}$

$\text{३ (कोज्या ७ क} + \text{कोज्या ५ क)} = \text{६ कोज्या ६ क कोज्या क}$

$\therefore$ $\text{कोज्या ९ क} + \text{३ कोज्या ७ क} + \text{३ कोज्या ५ क} + \text{कोज्या ३ क} =$

$\text{२ कोज्या ६ क (कोज्या ३ क} + \text{३ कोज्या क)}$

$= \text{८ कोज्या}^{३}\text{ क कोज्या ६ क}$

४। यदि $\frac{६ ज्या ख}{कोज्या (क + ख)} = \frac{३ ज्या २ ख}{कोज्या (क + २ ख)} = \frac{२ ज्या ३ ख}{कोज्या (क + ३ ख)}$

तो ख = न π

कल्पना करो कि समीकरणों का प्रत्येक पक्ष ल के तुल्य है तो

६ ज्या ख = ल कोज्या (क + ख) ... ... (१)

३ ज्या २ ख = ल कोज्या (क + २ ख) ... ... (२)

२ ज्या ३ ख = ल कोज्या (क + ३ ख) ... ... (३)

(१) और (३) से

६ ज्या ख + २ ज्या ३ ख = २ ल कोज्या (क + २ ख) कोज्या ख

= ६ कोज्या २ ख ज्या २ ख (२) से

= ३ ज्या ३ ख + ३ ज्या ख

∴ ज्या ३ ख = ३ ज्या ख

पर ज्या ३ ख = ३ ज्या ख − ४ ज्या^{३} ख

∴ ज्या^{३} ख = ०

ज्या ख = ०

ख = न π

५। ज्या २२ $\frac{१°}{२}$ किस के तुल्य है ?

ज्या ४५ = २ ज्या २२ $\frac{१}{२}$ कोज्या २२ $\frac{१}{२}$

$\frac{१}{\sqrt{२}}$ = २ ज्या २२ $\frac{१}{२}$ कोज्या २२ $\frac{१}{२}$

$\frac{१}{८}$ = ज्या^{२} २२ $\frac{१}{२}$ (१ − ज्या^{२} २२ $\frac{१}{२}$)

ज्या^{४} २२ $\frac{१}{२}$ − ज्या^{२} २२ $\frac{१}{२}$ + $\frac{१}{४}$ = − $\frac{१}{८}$ + $\frac{१}{४}$ = $\frac{१}{८}$

$$ज्या^{२}\, २२\frac{१}{२} - \frac{१}{२} = \pm\frac{१}{२\sqrt{२}}$$

$$ज्या^{२}\, २२\frac{१}{२} = \frac{\sqrt{२}-१}{२\sqrt{२}} = \frac{२-\sqrt{२}}{४}$$

$$ज्या\, २२\frac{१}{२} = \frac{\sqrt{(२-\sqrt{२})}}{२}$$

६। यदि क + ख + ग = १८०° तो सिद्ध करो कि

$$ज्या\,क + ज्या\,ख + ज्या\,ग = ४\,कोज्या\frac{क}{२}\,कोज्या\frac{ख}{२}\,कोज्या\frac{ग}{२}$$

$$ज्या\,क + ज्या\,ख = २\,ज्या\frac{क+ख}{२}\,कोज्या\frac{क-ख}{२}$$

$$ज्या\,ग = ज्या\,(१८० - क - ख) = ज्या\,(क + ख)$$

$$= २\,ज्या\frac{क+ख}{२}\,कोज्या\frac{क+ख}{२}$$

$\therefore$ ज्या क + ज्या ख + ज्या ग

$$= २\,ज्या\frac{क+ख}{२}\left\{कोज्या\frac{क+ख}{२} + कोज्या\frac{क-ख}{२}\right\}$$

$$= २\,ज्या\frac{क+ख}{२}\left\{२\,कोज्या\frac{क}{२}\,कोज्या\frac{ख}{२}\right\}$$

$$= ४\,कोज्या\frac{क}{२}\,कोज्या\frac{ख}{२}\,कोज्या\frac{ग}{२}$$

७। यदि ज्या (क + य) ज्या य = कोज्या² $\frac{क}{२}$ तो य = ९० − $\frac{क}{२}$

$$२\,कोज्या^{२}\frac{क}{२} = १ + कोज्या\,क$$

अ

$$\therefore\ (\text{ज्या क कोज्या य} + \text{कोज्या क ज्याय})\ \text{ज्या य} = \frac{१}{२}(१ + \text{कोज्या क})$$

$$\text{ज्या क ज्याय कोज्या य} + \text{कोज्या क ज्या}^{२}\ \text{य} = \frac{१}{२}(१ + \text{कोज्या क})$$

$$\frac{१}{२}\ \text{ज्या क ज्या २ य} + \frac{१ - \text{कोज्या २ य}}{२}\ \text{कोज्या क} = \frac{१}{२}(१ + \text{कोज्या क})$$

$$\text{ज्या क ज्या २ य} + \text{कोज्या क}\ (१ - \text{कोज्या २ य}) = १ + \text{कोज्या क}$$

$$\text{ज्या क ज्या २ य} - \text{कोज्या क कोज्या २ य} = १$$

$$\text{कोज्या}\ (\text{क} + २\ \text{य}) = -१$$

$$\text{क} + २\ \text{य} = १८०$$

$$\text{य} = \frac{१८० - \text{क}}{२} = ९० - \frac{\text{क}}{२}$$

८। यदि $\dfrac{\text{ज्या क}}{\text{प}_{१}} = \dfrac{\text{ज्या ३ क}}{\text{प}_{३}} = \dfrac{\text{ज्या ५ क}}{\text{प}_{५}}$ तो

$$\frac{\text{प}_{१} - २\,\text{प}_{३} + \text{प}_{५}}{\text{प}_{३}} = \frac{\text{प}_{३} - ३\,\text{प}_{१}}{\text{प}_{१}}$$

समीकरण के प्रत्येक पद को ल के तुल्य लो तो।

$$\left.\begin{array}{l}\text{ज्या क} = \text{ल प}_{१} \\ \text{ज्या ५ क} = \text{ल प}_{५}\end{array}\right\}\ \text{ज्या ३ क} = \text{ल प}_{३}$$

$$\text{ज्या क} + \text{ज्या ५ क} = \text{ल}\ (\text{प}_{१} + \text{प}_{५})$$

$$\frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ५ क}}{\text{ज्या ३ क}} = \frac{\text{प}_{१} + \text{प}_{५}}{\text{प}_{३}}$$

$$\frac{२\ \text{ज्या ३ क कोज्या २ क}}{\text{ज्या ३ क}} = \frac{\text{प}_{१} + \text{प}_{५}}{\text{प}_{३}}$$

$$२(\text{कोज्या }२\text{क} - १) = \frac{प_१ + प_३ - २प_२}{प_२}$$

$$-४\text{ ज्या}^२\text{क} = \frac{प_१ - २प_२ + प_३}{प_२}$$

फिर $$\frac{\text{ज्या }३\text{क}}{\text{ज्या क}} = \frac{प_३}{प_१}$$

$$\frac{३\text{ ज्या क} - ४\text{ ज्या}^३\text{क}}{\text{ज्या क}} = \frac{प_३}{प_१}$$

$$३ - ४\text{ ज्या}^२\text{क} = \frac{प_३}{प_१}$$

$$-४\text{ ज्या}^२\text{क} = \frac{प_३ - ३प_१}{प_१}$$

$$\therefore \frac{प_१ - २प_२ + प_३}{प_२} = \frac{प_३ - ३प_१}{प_१}$$

९। इन समीकरणों में से य और फ निकाल डालना है

$$\text{स्प य} + \text{स्प फ} = \text{ल} \quad \cdots \quad (१)$$

$$\text{स्प य स्प फ}(\text{कोछे }२\text{य} + \text{कोछे }२\text{फ}) = \text{ळ} \quad \cdots \quad (२)$$

$$\text{कोज्या}(\text{य} + \text{फ}) = \text{ज कोज्या}(\text{य} - \text{फ}) \quad \cdots \quad (३)$$

(३) से

कोज्या य कोज्या फ – ज्याय ज्याफ = ज कोज्या य कोज्या फ + ज ज्याय ज्याफ

$$\therefore \text{स्प य स्प फ} = \frac{१ - \text{ज}}{१ + \text{ज}}$$

$$\text{कोछे }२\text{य} = \frac{१}{\text{ज्या }२\text{य}} = \frac{१ + \text{स्प}^२\text{य}}{२\text{ स्प य}}$$

∴ (२) से

$$\text{स्प फ}\,(१+\text{स्प}^{२}\,\text{य})+\text{स्प य}\,(१+\text{स्प}^{२}\,\text{फ})=२\,\text{क्ष}$$

$$(\text{स्प य}+\text{स्प फ})\,(१+\text{स्प य स्प फ})=२\,\text{क्ष}$$

$$\therefore\quad \text{व}\left(१+\frac{१-\text{ज्ञ}}{१+\text{ज्ञ}}\right)=२\,\text{क्ष}$$

$$\text{व}=\text{क्ष}\,(१+\text{ज्ञ})\qquad \text{उत्तर}$$

१० । सिद्ध करो कि ज्या (क + २ ख) = ज्या क + २ ज्या ख कोज्या (क + ख)

११ । सिद्ध करो कि $\text{कोज्या}^{४}\,\text{क}-\text{कोज्या}^{४}\,\text{क}=\text{कोज्या}\,२\,\text{क}$

१२ । $$\frac{\text{कोज्या}\,३\,\text{क}+\text{ज्या}\,३\,\text{क}}{\text{कोज्या क}-\text{ज्या क}}=१+२\,\text{ज्या}\,२\,\text{क}$$

१३ । $$\frac{१+\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}}=\frac{१+\text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२}}{१-\text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२}}$$

१४ । २ ज्या क कोज्या ३ क = ज्या ४ क − ज्या २ क

१५ । २ कोज्या क कोज्या २ क = कोज्या ३ क + कोज्या क

१६ । ज्या २ क + ज्या ४ क + ज्या ६ क = ४ कोज्या क कोज्या २ क ज्या ३ क

१७ । $$\text{कोज्या}\,३\,\text{क}+\text{कोज्या}\,४\,\text{क}=२\,\text{कोज्या क कोज्या}\,\frac{७\,\text{क}}{२}$$

१८ । कोज्या ५ क − कोज्या ३ क = −२ ज्या ४ क ज्या क

१९ । $$\text{ज्या}\,३\,\text{क}-\text{ज्या}\,२\,\text{क}=२\,\text{कोज्या}\,\frac{५\,\text{क}}{२}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२}$$

२० । $$\text{कोज्या क}-\text{ज्या क}=\sqrt{२}\,\text{ज्या}\,(४५^{\circ}-\text{क})$$

२१ । $$\frac{\text{ज्या क}+\text{ज्या}\,२\,\text{क}}{१+\text{कोज्या क}+\text{कोज्या}\,२\,\text{क}}=\text{स्प क}$$

२२ । $\dfrac{\text{कोज्या}\,(\text{क} + ४५)}{\text{कोज्या}\,(\text{क} - ४५)} = \text{छेरे}\;२\,\text{क} - \text{स्प}\;२\,\text{क}$

२३ । $\text{स्प}\;४\,\text{क} = \dfrac{४\;\text{स्प}\;\text{क} - ४\;\text{स्प}^{३}\,\text{क}}{१ - ६\;\text{स्प}^{२}\,\text{क} + \text{स्प}^{४}\,\text{क}}$

२४ । $\text{ज्या}\;\text{क} = ४\;\text{ज्या}\,\dfrac{\text{क}}{३}\;\text{ज्या}\,\dfrac{\pi - \text{क}}{३}\;\text{ज्या}\,\dfrac{\pi + \text{क}}{३}$

२५ । $\text{कोछे}\;\text{क} = \dfrac{१}{२}\left(\text{स्प}\,\dfrac{\text{क}}{२} + \text{कोस्प}\,\dfrac{\text{क}}{२}\right)$

२६ । $\dfrac{\text{कोज्या}\;\text{नक} - \text{कोज्या}\,(\text{न} + २)\,\text{क}}{\text{ज्या}\,(\text{न} + २)\,\text{क} - \text{ज्या}\;\text{नक}} = \text{स्प}\,(\text{न} + १)\,\text{क}$

२७ । $\dfrac{\text{कोस्प}\;\text{क}}{\text{कोस्प}\;\text{क} - \text{कोस्प}\;३\,\text{क}} + \dfrac{\text{स्प}\;\text{क}}{\text{स्प}\;\text{क} - \text{स्प}\;३\,\text{क}} = १$

२८ । $\text{स्प}\;३\,\text{क} = \text{स्प}\;\text{क}\;\text{कोस्प}\left(\dfrac{\pi}{६} - \text{क}\right)\text{कोस्प}\left(\dfrac{\pi}{६} + \text{क}\right)$

२९ । $\text{ज्या}\;\text{क} = \dfrac{१}{\text{कोस्प}\,\dfrac{\text{क}}{२} - \text{कोस्प}\;\text{क}}$

३० । $१ + ८\;\text{कोज्या}\;\text{क}\;\text{कोज्या}^{२}\,\dfrac{\text{क}}{२} = \dfrac{\text{ज्या}^{२}\,\dfrac{३\,\text{क}}{२}}{\text{ज्या}\,\dfrac{\text{क}}{२}}$

३१ । $(२^{\text{न}+१}\,\text{कोछे}\;२^{\text{न}+१}\,\text{क})^{२} - (२^{\text{न}}\,\text{कोछे}\;२^{\text{न}}\,\text{क})^{२}$

$- (२^{\text{न}}\,\text{छे}\;२^{\text{न}}\,\text{क})^{२} = ०$

३२ । $\dfrac{\text{ज्या}\;\text{क} \pm \text{ज्या}\;\text{नक} + \text{ज्या}\,(२\,\text{न} - १)\,\text{क}}{\text{कोज्या}\;\text{क} \pm \text{कोज्या}\;\text{न}\,\text{क} + \text{कोज्या}\,(२\,\text{न} - १)\,\text{क}} = \text{स्प}\;\text{नक}$

३३ । $\text{कोज्या}^3 \text{क} \dfrac{\text{ज्या ३ क}}{३} + \text{ज्या}^3 \text{क} \dfrac{\text{कोज्या ३ क}}{३} = \dfrac{\text{ज्या ४ क}}{४}$

३४ । $\text{स्प}^2 \left(\dfrac{\pi}{४} + \dfrac{\text{क}}{२} \right) = \dfrac{\text{छेरेक} + \text{स्प क}}{\text{छेरेक} - \text{स्प क}}$

३५ । $\text{कोज्या}^4 \dfrac{\pi}{८} + \text{कोज्या}^4 \dfrac{३\pi}{८} + \text{कोज्या}^4 \dfrac{५\pi}{८} + \text{कोज्या}^4 \dfrac{७\pi}{८} = \dfrac{३}{२}$

३६ । $\text{ज्या} (\text{क} - \text{ख}) + \text{ज्या} (\text{ख} - \text{ग}) + \text{ज्या} (\text{ग} - \text{क})$

$+ ४ \, \text{ज्या} \dfrac{\text{क} - \text{ख}}{२} \, \text{ज्या} \dfrac{\text{ख} - \text{ग}}{२} \, \text{ज्या} \dfrac{\text{ग} - \text{क}}{२} = ०$

३७ । $\text{कोज्या २ क} + \text{कोज्या २ ख} + \text{कोज्या २ ग} =$

$४ \, \text{कोज्या} (\text{क} + \text{ख}) \, \text{कोज्या} (\text{ख} + \text{ग}) \, \text{कोज्या} (\text{ग} + \text{क})$

$- \text{कोज्या २} (\text{क} + \text{ख} + \text{ग})$

३८ । $\text{कोज्या} (\text{क} + \text{ख}) \, \text{ज्या ख} - \text{कोज्या} (\text{क} + \text{ग}) \, \text{ज्या ग}$

$= \text{ज्या} (\text{क} + \text{ख}) \, \text{कोज्या ख} - \text{ज्या} (\text{क} + \text{ग}) \, \text{कोज्या ग}$

३९ । $२ \, \text{कोज्या क} = \left\{ २ + (२ + २ \, \text{कोज्या ४ क})^{\frac{१}{२}} \right\}^{\frac{१}{२}}$

४० । $४ \, \text{कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग} = \text{कोज्या} (\text{क} - \text{ख} - \text{ग})$

$+ \text{कोज्या} (\text{ख} - \text{ग} - \text{क}) + \text{कोज्या} (\text{ग} - \text{क} - \text{ख}) + \text{कोज्या}$

$(\text{क} + \text{ख} + \text{ग})$

४१ । $\dfrac{\text{ज्या क}}{१ + २ \, \text{ज्या क}} = \dfrac{१}{४} \, \text{कोस्प} \dfrac{\text{क}}{२} - \dfrac{३}{४} \, \text{कोस्प} \dfrac{३ \text{क}}{२}$

४२ । $\text{क} + \text{स्प}^{-१} (\text{कोस्प २ क}) = \text{स्प}^{-१} (\text{कोस्प क})$

यदि क + ख + ग = १८०° तो ४३ से ४८ तक में समीकरण के सत्यता का प्रमाण दो

४३ । $\text{ज्या क} - \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग} = ४ \, \text{ज्या} \dfrac{\text{क}}{२} \, \text{कोज्या} \dfrac{\text{ख}}{२} \, \text{ज्या} \dfrac{\text{ग}}{२}$

४४ । कोज्या ४ क + कोज्या ४ ख + कोज्या ४ ग + १ = ४ कोज्या २ क कोज्या २ ख कोज्या २ ग

४५ । $कोज्या \frac{क}{२} + कोज्या \frac{ख}{२} + कोज्या \frac{ग}{२} = ४ कोज्या \frac{\pi - क}{४} कोज्या \frac{\pi - ख}{४} कोज्या \frac{\pi - ग}{४}$

४६ । $ज्या^{२} क + ज्या^{२} ख + ज्या^{२} ग = २$ (१ + कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग)

४७ । $\frac{ज्या क + ज्या ख - ज्या ग}{ज्या क + ज्या ख + ज्या ग} = स्प \frac{क}{२} स्प \frac{ख}{२}$

४८ । $कोज्या \frac{क}{२} + कोज्या \frac{ख}{२} + कोज्या \frac{ग}{२} = ४ कोज्या \frac{क + ख}{४} कोज्या \frac{ख + ग}{४} कोज्या \frac{ग + क}{४}$

४९ । सिद्ध करो कि $स्प २२ \frac{१}{२} = \sqrt{२} - १$

५० । सिद्ध करो कि $स्प ७ \frac{१}{२} = \frac{\sqrt{२} - १}{\sqrt{२} + \sqrt{३}}$

५१ । $स्प १४२ \frac{१}{२}$ कितने के तुल्य है ?

५२ । सिद्ध करो कि $ज्या ६३ = \frac{\sqrt{(१० + २\sqrt{५})} + \sqrt{५} - १}{४\sqrt{२}}$

५३ । ९° के त्रिकोणमितीय संबंधों को निकालो ।

५४ । ३° के त्रि० संबंधों को निकालो ।

५५ । कोज्या ४ य + कोज्या २ य + कोज्या य = ० में य का मान क्या है ?

५६ । कोज्या य × कोज्या ३ य = कोज्या ५ य × कोज्या ७ य में से य का मान निकालो ।

५७ । छेद २ य = कोछेद ३ य में य का क्या मान है ?

५८ । ज्या २ य = कोज्या ३ य में य का क्या मान है ?

५९ । ज्या य × ज्या ३ य = $\frac{१}{२}$ में य का क्या मान है ?

६० । ४ ज्या^{२} य + ज्या^{२} २ य = ३ में य किस के तुल्य है ?

६१ । यदि ज्या (क + ख) = म ज्या (क − ख) तो

$$\text{कोस्प}\,(\text{क} + \text{ख}) = \frac{१}{२}\left\{\frac{\text{म} - १}{\text{म}}\,\text{कोस्प ख} - \frac{\text{म} + १}{\text{म}}\,\text{स्प ख}\right\}$$

६२ । यदि $\frac{१}{\text{कोज्या}\,(\text{क} - \text{ख})} + \frac{१}{\text{कोज्या}\,(\text{क} + \text{ख})} = \frac{२}{\text{कोज्या क}}$

तो कोज्या क = $\sqrt{२}$ × कोज्या $\frac{\text{ख}}{२}$

६३ । यदि स्प य = न स्प फ तो स्प (य − फ), $\frac{\text{न} - १}{२\sqrt{\text{न}}}$

से अधिक नहीं हो सकता

६४ । $\frac{\text{कोज्या फ}}{\text{कोज्या य}} = \frac{\text{छ}}{\text{च}}$ यह सिद्ध करो कि

$$\text{कोस्प}\,\frac{\text{फ} + \text{य}}{२}\;\text{कोस्प}\,\frac{\text{य} - \text{फ}}{२} = \frac{\text{च} + \text{छ}}{\text{च} - \text{छ}}$$

६५ । $\frac{\text{प}}{\text{च}}$ = कोज्या य + कोज्या २ य

$\frac{\text{ब}}{\text{ज}}$ = ज्या य + ज्या २ य

इन में से य निकाल डालना है ।

६६ । यदि स्प क = म, स्प ख = न और $\text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२}\,\text{स्प}\,\frac{\text{ख}}{२} = \text{ल}$

तो यह सिद्ध करो कि

$$(१-\text{ल}^{२})^{२} = ४\,\text{ल}\left(\frac{१}{\text{म}} + \frac{\text{ल}}{\text{न}}\right)\left(\frac{१}{\text{न}} + \frac{\text{ल}}{\text{म}}\right)$$

६७ । यदि ज्या (π कोज्या य) = कोज्या (π ज्या य)

$$\text{तो ज्या २ य} = \pm\left(\frac{३}{४} + २\,\text{म} - ४\,\text{म}^{२}\right)$$

६८ । यह सिद्ध करो कि $\frac{\pi}{३}, \frac{\pi}{४}, \frac{\pi}{१२}$ की स्पर्शरेखा अनुपात श्रेढी है

६९ । यदि $१ = \frac{\text{ज्या}^{२}\,\text{फ}}{\text{ज्या}^{२}\,\text{य}} + \text{कोज्या}^{२}\,\text{फ}\ \text{कोज्या}^{२}\,\text{ब}$, तो

$$\text{ज्या ब} = \pm\,\frac{\text{स्प फ}}{\text{स्प य}}$$

७० । यदि $\frac{\text{स्प}^{२}\,\text{क}}{\text{स्प}^{२}\,\text{ख}} = \frac{\text{कोज्या ख}\,(\text{कोज्या य} - \text{कोज्या क})}{\text{कोज्या क}\,(\text{कोज्या य} - \text{कोज्या ख})}$

$$\text{तो स्प}^{२}\,\frac{\text{य}}{२} = \text{स्प}^{२}\,\frac{\text{क}}{२}\,\text{स्प}^{२}\,\frac{\text{ख}}{२}$$

अध्याय ६

घातप्रमापक संख्या ।

८८। प्रसिद्ध रीति से बड़ी संख्या के गुणन और भाजन करने और मूल निकालने में अति गौरव और क्लेश पड़ता है इस कारण संख्याओं के स्थान में घातप्रमापकसंज्ञक अन्य संख्या का कल्पना करके लघु प्रकार से फल जानते हैं।

८९। यदि एक ऐसा समीकरण हो कि $स = म^{क}$ जिस में स, म, क, कोई संख्या हैं तो म को मूल कहते हैं और क स संख्या का म मूल घातप्रमापक कहलाता है। $क = घा_{म} स$ से भी $स = म^{क}$ समझा जायगा।

$२^{५} = ३२$ में ५ बत्तीस का द्विमूलघातप्रमापक है।

९०। $स = म^{क}$ समीकरण में यदि म एक से अधिक कोई निश्चित संख्या हो तो ज्यों ज्यों क बढ़ता जावेगा त्यों त्यों स भी बढ़ता जावेगा।

यदि $क = 0$ तब $स = म^{0} = 1$

इसलिये १ का घातप्रमापक सर्वदा 0 है चाहे कोई मूल हो।

यदि $क = 1$ तो $स = म$

इसलिये मूल का घातप्रमापक १ है।

यदि $क = २$ $स = म^{२}$

यदि $क = \infty$ $स = \infty$

९१। दो संख्या के गुणनफल का घातप्रमापक दोनो संख्या के घातप्रमापक के योग के तुल्य होता है।

कल्पना करो कि $स = म^{क}$ अर्थात $क = घा_{म} स$

और $श = म^{ख}$ अर्थात $ख = घा_{म} श$

इसलिये $स \times श = म^{क} \times म^{ख} = म^{क+ख}$

$घा_{म} स श = क + ख = घा_{म} स + घा_{म} श$

९२ । भाजनफल का घातप्रमापक भाज्य और भाजक के घातप्रमापक के अन्तर के तुल्य होता है ।

कल्पना करो कि $\text{स} = \text{म}^{\text{क}}$ अर्थात $\text{क} = \text{घा}_{\text{म}}\,\text{स}$

और $\text{श} = \text{म}^{\text{ख}}$ अर्थात $\text{ख} = \text{घा}_{\text{म}}\,\text{श}$

$$\frac{\text{स}}{\text{श}} = \frac{\text{म}^{\text{क}}}{\text{म}^{\text{ख}}} = \text{म}^{\text{क} - \text{ख}}$$

$$\therefore \quad \text{घा}_{\text{म}}\frac{\text{स}}{\text{श}} = \text{क} - \text{ख} = \text{घा}_{\text{म}}\,\text{स} - \text{घा}_{\text{म}}\,\text{श}$$

९३ । $\text{स}^{\text{न}}$ का घातप्रमापक निकालना है ।

कल्पना करो कि $\text{स} = \text{म}^{\text{क}}$ अर्थात $\text{क} = \text{घा}_{\text{म}}\,\text{स}$

$$\text{स}^{\text{न}} = \text{म}^{\text{कन}}$$

$$\text{घा}_{\text{म}}\,\text{स}^{\text{न}} = \text{कन} = \text{न}\,\text{घा}_{\text{म}}\,\text{स}$$

इसलिये $\text{घा}_{\text{म}}(\text{स}^{\text{न}}) = \text{न}\,\text{घा}_{\text{म}}\,\text{स}$

९४ । किसी संख्या के दो अन्य मूल के घातप्रमापक का संबन्ध ।

कल्पना करो कि $\text{स} = \text{म}^{\text{क}}$ अर्थात् $\text{क} = \text{घा}_{\text{म}}\,\text{स}$ और $\text{ख} = \text{घा}_{\text{न}}\,\text{स}$ अर्थात $\text{स} = \text{न}^{\text{ख}}$

$$\therefore \quad \text{स} = \text{म}^{\text{क}} = \text{न}^{\text{ख}}$$

$$\text{म}^{\text{क}} = \text{न}^{\text{ख}}$$

$$\text{म}^{\frac{\text{क}}{\text{ख}}} = \text{न} \text{ और } \text{न}^{\frac{\text{ख}}{\text{क}}} = \text{म}$$

इसलिये $\frac{\text{क}}{\text{ख}} = \text{घा}_{\text{म}}\,\text{न}$ और $\frac{\text{ख}}{\text{क}} = \text{घा}_{\text{न}}\,\text{म}$

$$\therefore \quad \text{ख} = \text{क}\,\text{घा}_{\text{न}}\,\text{म} = \frac{\text{क}}{\text{घा}_{\text{म}}\,\text{न}}$$

यदि न मूलघातप्रमापक किसी संख्या का निकालना हो तो उस संख्या के म मूलघातप्रमापक को

$घा_{अ}$ म अथवा $\frac{१}{घा_{म} अ}$ से गुणन करने से इष्टफल प्राप्त होगा।

९५। प्रायः दशमूलघातप्रमापक लिये जाते हैं इस ग्रंथ में केवल घा स लिखने से स का दशमूलघातप्रमापक समझा जायेगा, $घा_{१०}$ स के स्थान घा स लिखेंगे।

९६। घातप्रमापक में पूर्णांक और भिन्नांक का वर्णन।

$$१०^{0} = १$$

$$१०^{१} = १०$$

$$१०^{२} = १००$$

$$१०^{३} = १०००$$

और इसी प्रकार से

यदि कोई संख्या १ और १० के बीच में हो तो उसका घातप्रमापक 0 और १ के बीच में है

यदि कोई संख्या १० और १०० के बीच में हो तो उसका घातप्रमापक १ और २ के बीच में है

इसी प्रकार से यदि कोई संख्या $१०^{न}$ और $१०^{न+१}$ के बीच में हो तो उसका घातप्रमापक न और न + १ के बीच में होगा।

$१०^{न}$ में न + १ अंक हैं जिस में न शून्य है और $१०^{न+१}$ में १ के पीछे न + १ शून्य हैं। इस से यह ज्ञात होता है कि यदि किसी संख्या में न + १ अंक हों तो उसके घातप्रमापक में न पूर्णांक होंगे और उसके पीछे दशमलव होगा। फिर

$$१०^{0} = १ = १$$

$$१०^{-१} = \frac{१}{१०} = .१$$

$$१०^{-२} = \frac{१}{१००} = .0१$$

और इसी प्रकार से

इसलिये यदि संख्या १ और ·१ के बीच में हो तो उसका घातप्रमापक ० और $-$१ के बीच में होगा ।

यदि संख्या ·१ और ·०१ के बीच में हो तो उसका घातप्रमापक $-$१ और $-$२ के बीच में होगा ।

इसीप्रकार से यदि संख्या $१०^{-न}$ और $१०^{-न-१}$ के बीच में हो तो उसका घातप्रमापक $-$न और $-$न$-$१ के बीच में होगा ।

९७। यदि किसी संख्या का दशमूलघातप्रमापक ज्ञात हो तो उस संख्या को १० अथवा १० के किसी घात से गुणने वा भाग देने से जो मिले उसका घातप्रमापक जान सकते हैं ।

कल्पना करो कि स कोई संख्या है जिसका घातप्रमापक ज्ञात है इसको $१०^{न}$ से गुणने वा भाग देने से जो मिले उसका घातप्रमापक निकालना है ।

$$घा\,१०^{न} \times स = घा\,१०^{न} + घा\,स = न\,घा\,१० + घा\,स = न + घा\,स$$

$$घा\,\frac{स}{१०^{न}} = घा\,स - घा\,१०^{न} = घा\,स - न$$

न पूर्णांक है इस कारण यह ज्ञात होता है कि यदि दो संख्या में दशमलव विन्दु का भेद हो अथवा एक संख्या के अंत में अधिक शून्य हों तो दोनों के घातप्रमापक में केवल पूर्णांक में भेद होगा दशमलव अर्थात् भिन्नांक एकही रहेंगे ।

उदाहरण ।

$$घा\,३·४५६७ = ·५३८६६१७$$

$$\therefore\quad घा\,३४५·६७ = २·५३८६६१७$$

९८। त्रिकोणमितीय संबन्ध भी संख्या हैं इस कारण उनका भी घातप्रमापक जान सकते हैं। ज्या कोज्या सब कोणों की एक से अधिक नहीं होती इसलिये प्रायः त्रिकोणमितिसंबन्धों का घातप्रमापक ऋण संख्या होगी ।

धन करने के लिये ज्ञात घातप्रमापक में १० जोड़ देते हैं और इस फल के लिये <u>घा</u> लिखते हैं जैसे <u>घा</u> ज्या क = घा ज्या क + १० ।

९९ । एक भिन्न पुस्तक वा सारणी में सब पूर्णांक का १ से १०००० तक और त्रिकोणमितिसंबन्धों का दस दस विकला के अंतर पर घातप्रमापक दिया रहता है उसमें से किसी अंक अथवा त्रि·संबन्ध का घातप्रमापक जानते हैं ।

१०० । उन संख्या और संबन्धेा के घातप्रमापक जानने के रीति जो सारणी में नहीं दिये हैं ।

प्रायः उन संख्याओं का घातप्रमापक निकालना होता है जो सारणी में नहीं दिये हैं जैसे ६ अथवा ७ अंक की संख्या का घा·प्र· जानना है ।

कल्पना करेा कि भ दो ऐसी संख्याओं के घातप्रमापक का अंतर है जिनमें १ का भेद है इन दोनेा संख्याओं को इस प्रकार की होनी अवश्य है कि इनका घातप्रमापक सारणी में हेा और जिस संख्या का घातप्रमापक जानना है वह इनके बीच में हेा यह भी कल्पना करेा कि म अज्ञात घातप्रमापक संख्या और दोनेा संख्या में से छोटी संख्या का अन्तर है, और यह कल्पना करेा कि इस छोटी संख्या के घातप्रमापक में क जोड़ने से अज्ञात घातप्रमापक मिलता है, इसलिये

$$\frac{क}{भ} = \frac{म}{१} \text{ अथवा } क : भ :: म : १$$

यदि ८ अथवा ९ अंक की संख्या का घातप्रमापक निकालना हेा जब कि सारणी में ६ अथवा ७ अंक की संख्या का घा·प्र· दिया है तेा ज्ञात घातप्रमापक संख्याओं में से दो ऐसी संख्या लेनी चाहिये जिनका अंतर १ हेा और फिर जितने अंक इसमें हेां उतने के पीछे दियी संख्या में दशमलव विन्दु रक्खेा परंतु जेा दो संख्या लेा उनमें से एक का दियी संख्या के प्रथम ६ वा ७ अंक के तुल्य होना अवश्य है इस प्रकार से पूर्णांक और दशमलव का घा·प्र· ज्ञात होगा फिर दियी संख्या का

घा·प्र· निकाल सकते हैं क्योंकि केवल घातप्रमापक के पूर्णांक में भेद होगा ।

१०१ । इस उदाहरण से पूर्वोक्त रीति स्पष्ट जान पड़ेगी ।

कल्पना करो कि सारणी में ५ अंक की संख्या का घातप्रमापक दिया है और घा ३५०३४८९ निकालना है सारणी में से यह जान पड़ता है कि

घा ३५०३४ = ४·५५३०८१६

घा ३५०३५ = ४·५५३०९३८

पहिले ३५०३४८९ के स्थान में

३५०३४·८९ लो

यह संख्या ३५०३४ और ३५०३५ के बीच में है ।

घा ३५०३५ = ४·५५३०९३८

घा ३५०३४ = ४·५५३०८१६

भ = ·०००0१२२

इसलिये

$$\frac{\text{क}}{\text{भ}} = \frac{\text{म}}{\text{१}} \text{ के स्थान में}$$

$$\frac{\text{क}}{\text{·००००१२२}} = \text{म} = \text{·८९}$$

क = ·००००१०८५८

= ·००००१०९ यदि ५८ को छोड़ दें ।

इसलिये

घा २५०३४·८९ = ४·५५३०८१६ + ·००००१०९

= ४·५५३०९२५

इसलिये

घा ३५०३४८९ = ६·५५३०९२५

क्योंकि ३५०३४·८९ को १०² से गुणाने से ३५०३४८९ मिलता है इसलिये ३५०३४८९ के घातप्रमापक में ३५०३४·८९ के घा·प्र·से दो अधिक पूर्णांक होगा ।

१०२। यदि यह जानना हो कि किस संख्या का घा॰ प्र॰ एक दियी हुई संख्या है तो पूर्व रीति की नाईं निकालेंगे

इस उदाहरण से रीति स्पष्ट होगी

यह जानना है कि ६·५५३०९२५ किस संख्या का* घातप्रमापक है सारणी में देखने से ज्ञात होता है कि ५५३०९२५ इन दो संख्या के बीच में है, ५५३०८१६ और ५५३०९३८

$$\text{घा } ३५७३४ = \cdot ५५३०८१६$$
$$\text{घा } ३५७३५ = \cdot ५५३०९३८$$
$$\text{अंतर } = \cdot ०००01२२$$

और दिये हुए अंक और ·५५३०८१६ का अंतर ·०००0१०९ है यदि क ऐसी संख्या हो कि इस को ३५७३४ में जोड़ने से वह संख्या मिले जिसका घातप्रमापक दिया अंक है तो

$$\cdot ०००0१२२ : \cdot ०००0१०९ = १ : \text{क}$$

$$\text{क} = \frac{\cdot ०००0१०९}{\cdot ०००0१२२} = \frac{१०९}{१२२}$$

$$= \cdot ८९$$

इसलिये ३५७३४·८९ उत्तर है।

१०३। उन कोणों के त्रिकोणमितिसंबंधी का प्रायः घातप्रमापक सारणी में दिया रहता है जिन में १०″ का अंतर है यदि ऐसे कोण का घा॰ प्र॰ निकालना हो जो सारणी में न हो तो ऊपर की रीति के अनुसार निकाल सकेंगे।

त्रिकोणमिति संबंध अथवा उसके घातप्रमापक की न्यूनता वा अधिकता कोण की न्यूनता वा आधिक्य के समपरिमाण कल्पना की गयी हैं।

१०४। यह स्मरण रखना अवश्य है कि ज्यों २ कोण ० से ९० तक बढ़ता जाता है त्यों २ ज्या, स्पर्शरेखा और छेदनरेखा बढ़ती हैं पर कोज्या, कोस्पर्शरेखा और कोछेदनरेखा घटती हैं॥

उदाहरण ।

यह जानना चाहिये कि घा २ = ·३०१०३, घा ३ = ·४७७१२१३
घा ७ = ·८४५०९८०

१ । $\text{५}^{\text{क}} = \text{२०}$ इस समीकरण में क का मान क्या है ?

$\text{५}^{\text{क}} = \text{२०}$ में दोनेा पक्ष का घातप्रमापक लेा

$$\therefore \quad \text{क घा ५} = \text{घा २०}$$

$$\text{क घा} \frac{\text{१०}}{\text{२}} = \text{घा १०} + \text{घा २}$$

$$\text{क (घा १० − घा २)} = \text{घा १०} + \text{घा २}$$

$$\text{क} - \text{क घा २} = \text{घा २} + \text{१}$$

$$\text{क} = \frac{\text{१ + घा २}}{\text{१ − घा २}} = \frac{\text{१·३०१०३}}{\text{१ − ·३०१०३}} = \frac{\text{१·३०१०३०}}{\text{·६९८९७}} = \text{१·८६}$$

२ । $\underline{\text{घा}}$ कोज्या ३४° १८′ = ९·९१७०३१७

$\underline{\text{घा}}$ कोज्या ३४° १९′ = ९·९१६९४५५

$\underline{\text{घा}}$ ३४° १८′ २५″ निकालना है ।

$\underline{\text{घा}}$ कोज्या ३४° १८′ = ९·९१७०३१७

$\underline{\text{घा}}$ कोज्या ३४° १९′ = ९·९१६९४५५

अंतर = ·००००८६२

पहिले चतुर्थांश में ज्यों ज्यों कोण बढ़ता है त्यों त्यों उसकी कोज्या घटती है इसलिये ३४° १८′ २५″ की कोज्या कोज्या ३४° १८′ से न्यून होगी ।

जब कोण में ६०″ का अंतर है तब कोज्या के $\underline{\text{घा}}$ में ·००००८६२ का भेद है इसलिये यदि क, $\underline{\text{घा}}$ कोज्या ३४° १८′ २५″ और $\underline{\text{घा}}$ कोज्या ३४° १८′ का भेद हो तेा

$$\text{६० : २५ : : ·००००८६२ : क}$$

$$\therefore \quad \text{क} = \frac{\text{२५}}{\text{६०}} \times \text{००००८६२} = \frac{\text{५}}{\text{१२}} \times \text{·००००८६२} = \text{·०००३५५०}$$

∴ घा कोज्या ३४° १९′ २५″ =

९·९१७०३१७ – ·०००३५५ = ९·९१६९९६२ उत्तर

३। यह जानना है कि किस कोण की ज्या का घा, ९·८४३२८९४ है।

यह ज्ञात है कि

घा ज्या ४४° ११′ ४०″ = ९·८४३२९२३

घा ज्या ४४° ११′ ३०″ = ९·८४३२७०७

अंतर = ·००००२१६

घा ज्या ४४° ११′ ३०″ से दियी संख्या का आधिक्य ९·८४३२८९४ – ९·८४३२७०७ अर्थात ·००००१८७ है। जिस कोण को जानना है वह ४४° ११′ ४०″ और ४४° ११′ ३०″ के बीच में है यह स्पष्ट है। कल्पना करो कि ४४° ११′ ३०″ + क″ मान है तब

·००००२१६ : ·००००१८७ :: १०″ : क″

$$\therefore \quad क = १० \times \frac{·००००१८७}{·००००२१६} = ८·७$$

∴ ४४° ११′ ३८″·७ उत्तर है।

४। यह सिद्ध करो कि

$$घा\,२ = ७\,घा\,\frac{१६}{१५} + ५\,घा\,\frac{२५}{२४} + ३\,घा\,\frac{८१}{८०}$$

५। यह सिद्ध करो कि

$$घा\,३ = ७\,घा\,\frac{१५}{१६} + ६\,घा\,\frac{८}{३} + ५\,घा\,\frac{२}{५} + घा\,\frac{३२}{२५}$$

६। $८^{क} = १००$ में क का मान निकालो।

७। $(४)^{२क} - ८(२)^{२क} + ७ = ०$ में क का मान निकालो।

८। घा$_{१०}$ ९८, कितने के तुल्य है?

घा$_{२५}$ ७५ क्या है?

घा$_{१०००}\sqrt[३]{१०}$ क्या है?

९। यदि घा ५·७४३४९१ = ·७५९१७६ तो $\sqrt{·०६२५}$ कितना है?

१० । यदि घा ४·२३६६ = ·६२७०२२७

तो $(\frac{१}{३})\frac{१८७}{१४}$ कितने के तुल्य है?

११ । $५^{६-४\text{क}} = २^{\text{क}+३}$ में क का क्या मान है?

१२ । $\text{अ}^{२\text{क}} - १ = \text{अ}^{\text{क}}$ में क का क्या मान है?

१३ । घा २८२३ = ३·४५०७१०९

घा २८२४ = ३·४५०८६४७

घा २८२३२५ निकालो

१४ । घा ३४·५२ = १·५३८०७०८

घा ३४·५३ = १·५३८१९६६

किस संख्या का घातप्रमापक १·५३८१५६ है?

१५ । घा ४·२८३ = ·६३१७४८१

घा ४·२८४ = ·६३१८४९५

घा $\sqrt[४]{(४२८४३५)}$ क्या है?

१६ । घा ८८०४ = ३·९४४६८००

घा ८८०५ = ३·९४४७२९४

किस संख्या का घातप्रमापक ५·९४४७१३० है?

१७ । ज्या ४१° १०′ = ·६५८२५१६

ज्या ४१° २०′ = ·६६०४३८६

ज्या ४१° १७′ क्या है?

१८ । घा ज्या २१° ३′ = ९·५५५३१५२

घा ज्या २१° २′ = ९·५५४९८६८

घा ज्या २१° २′ २५″ क्या है?

१९ । घा स्प २७° १३′ = ९·७११२१४८

घा स्प २७° १२′ = ९·७१०९०४१

घा स्प २७° १२′ ३५″ क्या है?

२० । घा कोस्प ८१° ४६′ = ९·१६०४५६९

और १०″ का अंतर ·०००१४८६ है, किस कोण के कोस्प का घा ९·१६०३४९३ है?

अध्याय ७ ।

त्रिभुज के कोण और भुजा का संबंध ।

१०५ । त्रिभुज के कोण और भुजा का संबंध निकालने के लिये कोणों के लिये क ख ग और उनके साम्हने की भुजा के लिये का खा गा लिखेंगे अर्थात् क के साम्हने की भुजा का है ख की खा और ग की गा है । यहां पर का खा गा भुजाओं की लंबाई की संख्या है ॥

१०६ । किसी त्रिभुज में कोणों की ज्या और उन कोणों के सन्मुख की भुजा समपरिमाण होती हैं अर्थात् कोणों की ज्या और सामने की भुजाओं में एकही संबंध रहता है ।

कल्पना करो कि कखग कोई त्रिभुज है (३०,३१ क्षेत्र) क से खग पर एक लंब कघ गिराओ ।

पहिले यदि कखग न्यूनकोणत्रिभुज हो तो घ, ग और ख के बीच में होगा जैसा कि ३० क्षेत्र में है ।

$$\text{ज्या ख} = \frac{\text{कघ}}{\text{कख}},\ \text{ज्या ग} = \frac{\text{कघ}}{\text{कग}}$$

$$\therefore \frac{\text{ज्या ख}}{\text{ज्या ग}} = \frac{\text{कग}}{\text{कख}} = \frac{\text{खा}}{\text{गा}}$$

फिर यदि कखग अधिककोणत्रिभुज हो तो कघ रेखा खग के बढ़ाने से मिलेगी जैसा ३१ में है ।

$$\text{ज्या ख} = \frac{\text{कघ}}{\text{कख}}$$

$$\text{ज्या ग} = (१८० - \text{कगघ}) = \text{ज्या कगघ} = \frac{\text{कघ}}{\text{कग}}$$

$$\text{इसलिये } \frac{\text{ज्या ख}}{\text{ज्या ग}} = \frac{\text{कग}}{\text{कख}} = \frac{\text{खा}}{\text{गा}}$$

इसी प्रकार से यह सिद्ध होगा कि

$$\frac{\text{ज्या क}}{\text{ज्या ग}} = \frac{\text{का}}{\text{गा}}$$

इन फलों को इस प्रकार से लिख सकते हैं

$$\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$

१०७। किसी त्रिभुज में

$$\text{का} = \text{गा कोज्या ख} + \text{खा कोज्या ग}$$

(३०) में खग = खघ + घग = कख कोज्या ख + कग कोज्या ग

(३१) में खग = खघ − घग = कख कोज्या ख − कग कोज्या (१८० − ग)

= कख कोज्या ख + कग कोज्या ग

∴ का = गा कोज्या ख + खा कोज्या ग

इसी प्रकार से यह सिद्ध कर सकते हैं कि

खा = का कोज्या ग + गा कोज्या क

गा = का कोज्या ख + खा कोज्या क

१०८। किसी त्रिभुज के किसी कोण की कोज्या को भुजाओं की राशि में लिखने की रीति।

यह सिद्ध करना है कि कोज्या ग $= \frac{\text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{\text{२ का खा}}$

पहिले कल्पना करो कि कखग न्यूनकोणत्रिभुज है जैसे ३० क्षेत्र में रेखागणित की दूसरी अध्याय के १३ साध्य से

$\text{कख}^2 = \text{खग}^2 + \text{कग}^2 - \text{२ खग} \times \text{घग}$

और घग = कग कोज्या ग

∴ $\text{गा}^2 = \text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{२ का खा कोज्या ग}$

यदि त्रिभुज अधिककोण हो तो २ अध्याय के १२ साध्य से ३१ में

$$कघ^२ = खग^२ + कग^२ + २\ खग \times गघ$$

$$पर\ \ गघ = कग\ कोज्या\ (१८० - ग) = -\ कग\ कोज्या\ ग$$

$$\therefore\ \ गा^२ = का^२ - खा^२ - २\ का\ खा\ कोज्या\ ग$$

$$\therefore\ \ कोज्या\ ग = \frac{का^२ + खा^२ - गा^२}{२\ का\ खा}$$

इसी प्रकार से

$$कोज्या\ क = \frac{खा^२ + गा^२ - का^२}{२\ खा\ गा}$$

$$कोज्या\ ख = \frac{का^२ + गा^२ - खा^२}{२\ का\ गा}$$

१०९। $\frac{क}{२}\ \ \frac{ख}{२}\ \ \frac{ग}{२}$ के त्रिकोणमितीय संबंधों को का खा गा की राशि में लिखने की रीति।

$$ज्या^२\frac{क}{२} = \frac{१ - कोज्या\ क}{२}$$

$$पर\ कोज्या\ क = \frac{खा^२ + गा^२ - का^२}{२\ खा\ गा},\ इसलिये$$

$$ज्या^२\frac{क}{२} = \frac{१ - \frac{खा^२ + गा^२ - का^२}{२\ खा\ गा}}{२} = \frac{का^२ - (खा - गा)^२}{४\ खा\ गा}$$

$$= \frac{१}{खा\ गा} \cdot \frac{का + खा - गा}{२} \cdot \frac{का - खा + गा}{२}$$

$$कल्पना\ करो\ कि\ सा = \frac{का + खा + गा}{२}$$

$$\therefore \qquad \frac{\text{का} + \text{खा} - \text{गा}}{२} = \text{सा} - \text{गा}$$

$$\frac{\text{का} + \text{गा} - \text{खा}}{२} = \text{सा} - \text{खा}$$

$$\therefore \qquad \text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{खा}\,\text{गा}}}$$

$$\text{कोज्या}^{२}\,\frac{\text{क}}{२} = \frac{१ + \text{कोज्या}\,\text{क}}{२} = \frac{१ + \dfrac{\text{खा}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{का}^{२}}{२\,\text{खा}\,\text{गा}}}{२}$$

$$= \frac{(\text{खा} + \text{गा})^{२} - \text{का}^{२}}{४\,\text{खा}\,\text{गा}} = \frac{१}{\text{खा}\,\text{गा}} \cdot \frac{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}{२} \cdot \frac{\text{खा} + \text{गा} - \text{का}}{२}$$

$$= \frac{\text{सा}\,(\text{सा} - \text{का})}{\text{खा}\,\text{गा}}$$

$$\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{\text{सा}\,(\text{सा} - \text{का})}{\text{खा}\,\text{गा}}}$$

$$\text{स्पर}\,\frac{\text{क}}{२} = \frac{\text{ज्या}\,\dfrac{\text{क}}{२}}{\text{कोज्या}\,\dfrac{\text{क}}{२}} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा}\,(\text{सा} - \text{का})}}$$

इसी प्रकार से $\frac{\text{ख}}{२}$ और $\frac{\text{ग}}{२}$ की ज्या कोज्या और स्पर्शरेखा का मान लिख सकते हैं।

११० । वर्गमूल के चिह्न के पूर्व धन लिया है इसका कारण यह है कि क, १८०° से न्यून है इसलिये $\frac{\text{क}}{२}$, ९०° से न्यून है इसलिये सब त्रिकोणमितिसंबंध धन हैं।

यह स्पष्ट है कि सा − का, सा − खा, सा − गा धन हैं क्योंकि ये $\frac{\text{का} + \text{खा} - \text{गा}}{२}$, $\frac{\text{का} + \text{गा} - \text{खा}}{२}$ और $\frac{\text{खा} + \text{गा} - \text{का}}{२}$ के तुल्य हैं और ये धन हैं क्योंकि किसी त्रिभुज की दो भुजा मिलकर तीसरी से अधिक होती हैं ।

उदाहरण ।

१ । किसी त्रिभुज में $\frac{\text{ज्या क} - \text{ज्या ख}}{\text{का} - \text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$

$\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}} = \text{य}$ कल्पना करो

$\text{ज्या क} = \text{य का}$

$\text{ज्या ख} = \text{य खा}$

$\text{ज्या क} - \text{ज्या ख} = \text{य} (\text{का} - \text{खा})$

$\therefore \quad \text{य} = \frac{\text{ज्या क} - \text{ज्या ख}}{\text{का} - \text{खा}}$

पर $\text{य} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$

इसलिये $\frac{\text{ज्या क} - \text{ज्या ख}}{\text{का} - \text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$

२ । यदि किसी त्रिभुज में का छेरे ख = २ गा तो यह सिद्ध करना है कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा ।

का छेरे ख = २ गा

इसलिये $\frac{१}{\text{कोज्या ख}} = \frac{२ \text{गा}}{\text{का}}$

$\text{कोज्या ख} = \frac{\text{का}}{२ \text{गा}}$

$$\text{पर कोज्या ख} = \frac{\text{का}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{खा}^{२}}{\text{२ का गा}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{का}}{\text{२ गा}} = \frac{\text{का}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{खा}^{२}}{\text{२ का गा}}$$

$$\therefore \quad \text{का}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{खा}^{२} = \text{का}^{२}$$

$$\text{गा}^{२} = \text{खा}^{२}$$

$$\therefore \quad \text{गा} = \text{खा}$$

इसलिये त्रिभुज समद्विबाहु है।

३। सिद्ध करो कि $\text{का}^{२}\,\text{ज्या २ ख} + \text{खा}^{२}\,\text{ज्या २ क} = \text{२ का खा ज्या ग}$,

$\text{का}^{२}\,\text{ज्या २ ख} + \text{खा}^{२}\,\text{ज्या २ क} =$

$\text{२ का}^{२}\,\text{ज्या ख कोज्या ख} + \text{२ खा}^{२}\,\text{ज्या क कोज्या क} =$

$$\text{२ का}^{२}\,\text{ज्या ख}\,\frac{\text{का}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{खा}^{२}}{\text{२ का गा}} + \text{२ खा}^{२}\,\text{ज्या क}\,\frac{\text{खा}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{का}^{२}}{\text{२ खा गा}} =$$

$$\frac{\text{का}}{\text{गा}}\,\text{ज्या ख}\,(\text{का}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{खा}^{२}) + \frac{\text{खा}}{\text{गा}}\,(\text{खा}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{का}^{२})\,\text{ज्या क} =$$

$$\frac{\text{ज्या क ज्या ख}}{\text{ज्या ग}}\,(\text{का}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{खा}^{२}) + \frac{\text{ज्या क ज्या ख}}{\text{ज्या ग}}\,(\text{खा}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{का}^{२}) =$$

$$\frac{\text{ज्या क ज्या ख}}{\text{ज्या ग}} \times \text{२ गा}^{२} = \frac{\text{का ज्या ग}}{\text{गा}} \times \text{खा}\,\frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}} \times \frac{१}{\text{ज्या ग}}$$

$$\times\,\text{२ गा}^{२} = \text{२ काखा ज्या ग}$$

४। एक त्रिभुज में $\frac{१}{\text{ज्या क}}, \frac{१}{\text{ज्या ख}}, \frac{१}{\text{ज्या ग}}$ अनुपात श्रेणी में है यह सिद्ध करना है कि $\frac{१}{१ - \text{कोज्या क}}, \frac{१}{१ - \text{कोज्या ख}}, \frac{१}{१ - \text{कोज्या ग}}$ भी अनुपात श्रेणी में हैं।

$$\text{१} - \text{कोज्या क} = \text{२ ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{क}}{\text{२}} = \text{२} \frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{खा गा}}$$

$$\text{२ ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{ख}}{\text{२}} = \text{२} \frac{(\text{सा} - \text{गा})(\text{सा} - \text{का})}{\text{का गा}}$$

$$\text{२ ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{ग}}{\text{२}} = \text{२} \frac{(\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})}{\text{का खा}}$$

क्योंकि $\frac{\text{१}}{\text{ज्या क}}, \frac{\text{१}}{\text{ज्या ख}}, \frac{\text{१}}{\text{ज्या ग}}$ अनुपात श्रेणी में हैं

इसलिये $\frac{\text{१}}{\text{ज्या क}} + \frac{\text{१}}{\text{ज्या ग}} = \frac{\text{२}}{\text{ज्या ख}}$

$$\therefore \quad \frac{\text{१}}{\text{का}} + \frac{\text{१}}{\text{गा}} = \frac{\text{२}}{\text{खा}} \text{ अथवा}$$

$$\text{खागा} + \text{काखा} = \text{२ कागा}$$

$$\text{खा गा}(\text{सा} - \text{का}) + \text{का खा}(\text{सा} - \text{गा}) = \text{२ कागा}(\text{सा} - \text{खा})$$

$$\frac{\text{खा गा}}{(\text{सा} - \text{गा})(\text{सा} - \text{खा})} + \frac{\text{का खा}}{(\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})} = \frac{\text{२ का गा}}{(\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{गा})}$$

$$\frac{\text{१}}{\text{२ ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{क}}{\text{२}}} + \frac{\text{१}}{\text{२ ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{ग}}{\text{२}}} = \frac{\text{२}}{\text{२ ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{ख}}{\text{२}}}$$

$$\frac{\text{१}}{\text{१} - \text{कोज्या क}} + \frac{\text{१}}{\text{१} - \text{कोज्या ख}} = \frac{\text{२}}{\text{१} - \text{कोज्या ख}}$$

$\therefore \frac{\text{१}}{\text{१} - \text{कोज्या क}}, \frac{\text{१}}{\text{१} - \text{कोज्या ख}}, \frac{\text{१}}{\text{कोज्या ग}}$ अनुपात श्रेणी में हैं।

५। सिद्ध करो कि $\frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} - \text{ज्या ग}}{\text{ज्या क} - \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}} = \frac{\text{का} + \text{खा} - \text{गा}}{\text{का} - \text{खा} + \text{गा}}$

६। सिद्ध करो कि $(\text{का} + \text{खा})(\text{१} - \text{कोज्या ग}) =$
$\text{गा}(\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख})$

७ । यदि गा कोज्या ख = खा कोज्या ग तो त्रिभुज समद्विबाहु होगा

८ । यदि त्रिभुज समद्विबाहु हो तो $\text{गा} = २\,\text{का}\;\text{ज्या}\,\frac{\text{ग}}{२}$

९ । सिद्ध करो कि $\text{कोज्या}\,\text{क} + \text{कोज्या}\,\text{ख} = २\,\frac{\text{का} + \text{खा}}{\text{गा}}\,\text{ज्या}^{२}\,\frac{\text{ग}}{२}$

१० । सिद्ध करो कि $\text{कोस्प}\,\text{क} - \text{कोस्प}\,\text{ख} = \frac{\text{खा}^{२} - \text{का}^{२}}{\text{काखा}\;\text{ज्या}\,\text{ग}}$

११ । सिद्ध करो कि $\frac{\text{कोस्प}\,\frac{\text{ख}}{२} + \text{कोस्प}\,\frac{\text{ग}}{२}}{\text{कोस्प}\,\frac{\text{क}}{२}} = \frac{२\,\text{का}}{\text{खा} + \text{गा} - \text{का}}$

१२ । सिद्ध करो कि $\text{गा}^{२} = (\text{का} + \text{खा})^{२}\,\text{ज्या}^{२}\,\frac{\text{ग}}{२} +$

$(\text{का} - \text{खा})^{२}\,\text{कोज्या}^{२}\,\frac{\text{ग}}{२}$

१३ । सिद्ध करो कि $\text{कोस्प}\,\text{ख} + \text{कोस्प}\,\text{क} = \frac{\text{गा}\;\text{कोछे}\,\text{ख}}{\text{खा}}$

१४ । यदि त्रिभुज में $\text{का}^{३} + \text{खा}^{३} + \text{गा}^{३} = \text{गा}^{२}(\text{का} + \text{खा} + \text{गा})$ और $\text{ज्या}\,\text{क}\;\text{ज्या}\,\text{ख} = \text{ज्या}^{२}\,\text{ग}$ तो सिद्ध करो कि त्रिभुज समत्रिबाहु है ।

१५ । यदि ज्या क, ज्या ख, ज्या ग अनुपात श्रेणी में हों तो

$$\text{स्परे}\,\frac{\text{क}}{२} + \text{स्परे}\,\frac{\text{ग}}{२} = \frac{१}{३}$$

१६ । सिद्ध करो कि $\frac{\text{ज्या}^{२}\,\frac{\text{ख}}{२}}{\text{खा}} + \frac{\text{ज्या}^{२}\,\frac{\text{ग}}{२}}{\text{गा}} = \frac{\text{सा} - \text{का}}{\text{खा}\;\text{गा}}$

१७ । सिद्ध करो कि $\frac{\text{ज्या}^{२}\,\text{क}}{\text{का}^{२}} = \frac{\text{कोज्या}\,\text{क}\;\text{कोज्या}\,\text{ख}}{\text{का}\;\text{खा}} +$

$\frac{\text{कोज्या}\,\text{क}\;\text{कोज्या}\,\text{ग}}{\text{का}\;\text{गा}} + \frac{\text{कोज्या}\,\text{ख}\;\text{कोज्या}\,\text{ग}}{\text{खा}\;\text{गा}}$

१८ । $\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख} + \text{कोज्या ग} = १ + \dfrac{\text{२ का ज्या ख ज्या ग}}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}$

१९ । यदि ग समकोण हो तो सिद्ध करो कि $\text{कोस्प}\,\dfrac{\text{क}}{२} = \dfrac{\text{खा} + \text{गा}}{\text{का}}$

२० । सिद्ध करो कि

$$\text{कोस्प}\,\frac{\text{क}}{४} - \text{को छे}\,\frac{\text{क}}{२} : \text{कोस्प}\,\frac{\text{ख}}{२} + \text{कोस्प}\,\frac{\text{ग}}{२} :: \text{खा} + \text{गा} - \text{का} : \text{२ का}$$

२१ । यदि क : ख : ग :: २ : ३ : ४ तो $\dfrac{\text{का} + \text{गा}}{\text{२ खा}} = \text{कोज्या}\,\dfrac{\text{क}}{२}$

२२ । यदि किसी त्रिभुज कखग की भुजा खग, घ पर दो तुल्य भाग में कटी हो तो

$$\text{कोस्प खकघ} - \text{कोस्प ख} = \text{२ कोस्प क}$$

२३ । यदि किसी त्रिभुज के कोण की कोटिस्पर्शरेखा अनुपातश्रेणी में हों तो भुजाओं के वर्ग भी अनुपात में होंगे ।

२४ । कखग त्रिभुज का शीर्षकोण क एक रेखा से दो तुल्य भाग में बांटा जाता है और यह रेखा आधार को दो ऐसा भाग करती है कि उनका सम्बन्ध म : न है यह सिद्ध करना है कि

$$\text{स्पर ख} = \frac{\text{म ज्या क}}{\text{न} - \text{म कोज्या क}}$$

अध्याय ८

त्रिभुजगणित ।

१११ । प्रत्येक त्रिभुज में छ अवयव होते हैं अर्थात तीन कोण और तीन भुजा इन अवयवों में आपस में संबंध रहता है ।

यदि क ख ग त्रिभुज के कोण हों और का खा गा इन कोणों के साम्हने की भुजा तो यह ज्ञात है कि

$$क + ख + ग = १८०^\circ \quad \ldots \quad (१)$$

$$\frac{ज्या\ क}{का} = \frac{ज्या\ ख}{खा} \quad \ldots \quad (२)$$

$$\frac{ज्या\ ख}{खा} = \frac{ज्या\ ग}{गा} \quad \ldots \quad (३)$$

यहां पर तीन समीकरण हैं और ६ संख्या हैं इनमें से तीन का मान और तीन की राशि में निकाल सकते हैं । इसलिये यदि त्रिभुज के तीन अवयव ज्ञात हों तो शेष अवयव निकल सकते हैं यदि तीन कोण दिये हों तो भुजा नहीं ज्ञात हो सकतीं क्योंकि यह ज्ञात है कि तीनों कोण का योग १८०° है इसलिये यदि दो कोण दिया है तो तीसरा भी जानते हैं तीन कोण देना यथार्थ में दो कोण देने के तुल्य है, यह भी अवश्य है कि दो भुजा मिलकर तीसरी से बड़ी हों ।

११२ । त्रिभुजगणित की क्रिया में नीचे लिखी दशाओं का सम्भव है ।

पहिले जब एक भुजा और दो कोण दिये हों,

दूसरे जब दो भुजा और अन्तर्गत कोण दिया हो,

तीसरे जब दो भुजा और इनमें से एक के साम्हने का कोण दिया हो,

चौथे जब तीनों भुजा दियी हों ।

११३ । त्रिभुज में एक भुजा (खा) और दो कोण (क, ग) ज्ञात हैं शेष अवयवों को जानना है ।

$$ख = १८० - क - ग$$

इसलिये तीसरा कोण ज्ञात पड़ा

फिर $\frac{का}{खा} = \frac{ज्या\ क}{ज्या\ ख}$, $\therefore का = खा \frac{ज्या\ क}{ज्या\ ख}$

घातप्रमापकरूप से

$$घा\ का = घा\ खा + घा\ ज्या\ क - घा\ ज्या\ ख$$

$$= घा\ खा + घा\ ज्या\ क - \underline{घा}\ ज्या\ ख$$

इसी प्रकार से

$$घा\ गा = घा\ खा + घा\ ज्या\ ग - घा\ ज्या\ ख$$

इस प्रकार से अज्ञात अवयव निकाले गये।

११४। यदि त्रिभुज में (खा गा) भुज और (क) कोण ज्ञात हों तो शेष अवयव जानना है।

$$\frac{ज्या\ ख}{ज्या\ ग} = \frac{खा}{गा}$$

$$\frac{ज्या\ ख - ज्या\ ग}{ज्या\ ख + ज्या\ ग} = \frac{खा - गा}{खा + गा}$$

$$\frac{२\ ज्या\ \frac{ख - ग}{२}\ कोज्या\ \frac{ख + ग}{२}}{२\ कोज्या\ \frac{ख - ग}{२}\ ज्या\ \frac{ख + ग}{२}} = \frac{खा - गा}{खा + गा}$$

$$\frac{स्पर्श\ \frac{ख - ग}{२}}{स्पर्श\ \frac{ख + ग}{२}} = \frac{खा - गा}{खा + गा}$$

परन्तु $\frac{ख + ग}{२} = ९० - \frac{क}{२}$

$$\therefore \text{ स्पर्श } \frac{\text{ख}+\text{ग}}{२} = \text{कोस्पर्श } \frac{\text{क}}{२}$$

$$\therefore \text{ स्पर्श } \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = \frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}} \text{ कोस्पर्श } \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{घा स्पर्श } \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = \text{घा}(\text{खा}-\text{गा}) - \text{घा}(\text{खा}+\text{गा}) + \text{घा कोस्प } \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{घा स्पर्श } \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = \text{घा}(\text{खा}-\text{गा}) - \text{घा}(\text{खा}+\text{गा}) + \text{घा कोस्प } \frac{\text{क}}{२} \text{ ।}$$

इससे $\frac{\text{ख}-\text{ग}}{२}$ अथवा ख − ग ज्ञात होता है परंतु ख + ग ज्ञात है क्योंकि यह १८० − क के तुल्य है इस लिये ख और ग जान सकते हैं

फिर का = $\frac{\text{ज्या क}}{\text{ज्या ग}}$ गा इसलिये का भी ज्ञात हुआ।

११५। कोणों के निकालने के पूर्व का को इस प्रकार से निकाल सके हैं

$$\text{का}^२ = \text{खा}^२ + \text{गा}^२ - २ \text{ खा गा कोज्या क}$$

इसमें घातप्रमापक की रीति नहीं लगा सकते यदि घातप्रमापक लेना हो तो इस प्रकार क्रिया करेंगे।

$$\text{का}^२ = \text{खा}^२ + \text{गा}^२ - २ \text{ खा गा कोज्या क}$$

$$= (\text{खा}+\text{गा})^२ - ४ \text{ खा गा कोज्या}^२ \frac{\text{क}}{२}$$

$$= (\text{खा}+\text{गा})^२ \left\{ १ - \frac{४ \text{ खा गा}}{(\text{खा}+\text{गा})^२} \text{ कोज्या}^२ \frac{\text{क}}{२} \right\}$$

ज्या^{२}य को $\frac{४ \text{ खा गा}}{(\text{खा}+\text{गा})^२}$ कोज्या$^२ \frac{\text{क}}{२}$ के तुल्य लो तो

$$\text{का}^२ = (\text{खा}+\text{गा})^२ (१ - \text{ज्या}^२ \text{य}) = (\text{खा}+\text{गा})^२ \text{ कोज्या}^२ \text{य}$$

$$\therefore \text{ का} = (\text{खा}+\text{गा}) \text{ कोज्या य}$$

घा का = घा (खा + गा) + घा कोज्या य — १०

यह सम्भव है कि य एक ऐसा कोण हो सकता है जिसकी ज्या^{2}

$$\frac{४ \text{ खा गा}}{(\text{खा} + \text{गा})^2} \text{ कोज्या}^2 \frac{\text{क}}{२}$$ के तुल्य है क्योंकि यह धन है और एक से न्यून है इसलिये कि ४खागा कधी (खा + गा)^2 से अधिक नहीं है और कोज्या^{2} $\frac{\text{क}}{२}$, १ से न्यून है । य को इस समीकरण से निकालेंगे

$$२ \text{ घा ज्या य} = २ \text{ घा } २ + \text{घा खा} + \text{घा गा} - २ \text{ घा } (\text{खा} + \text{गा}) + २ \text{ घा कोज्या } \frac{\text{क}}{२} ।$$

११६ । त्रिभुज में (का खा) और (क) ज्ञात हैं, शेष अवयव निकालना है ।

$$\text{ज्या ख} = \frac{\text{खा}}{\text{का}} \text{ ज्या क}$$ इससे ख ज्ञात हुआ ।

क्योंकि ग = १८० — क — ख इसलिये ग जाना गया

$$\text{गा} = \text{का} \frac{\text{ज्या ग}}{\text{ज्या क}}$$ इससे गा ज्ञात होता है ।

कल्पना करो कि (३२ क्षेत्र) खकग, क कोण है, और क ग = खा, ग से एक रेखा गछ का के तुल्य खींचो ग को केन्द्र मान के गछ की दूरी पर एक वृत्त खींचो कल्पना करो कि यह वृत्त क ख को ख ख$_2$ पर काटता है ग से एक लम्ब गप, क ख पर खींचो ।

यदि गछ, गप से न्यून हो तो वृत्त कख रेखा से किसी विन्दु में नहीं मिलेगा इसलिये कखग त्रिभुज नहीं बन सकता इसलिये इस दशा में दिये हुए अवयवों से कोई त्रिभुज नहीं बन सकता । फिर गप = खा ज्या क इसलिये यदि गछ अर्थात का गप से न्यून हो तो का < खा ज्या क

इस लिये ज्या ख १ से अधिक है परंतु यह असम्भव है इस लिये त्रिकोणमिति से भी ज्ञात होता है कि इस दशा में दियेहुए अवयवों से त्रिभुज बनाना असंभव है ।

यदि गछ = गप तो वृत्त कख रेखा से प पर मिलेगा अर्थात कख इस वृत्त को स्पर्श करेगी ।

इसलिये गपक एक समकोण है। ऐसी अवस्था में दिये हुए अवयवों से एक समकोण त्रिभुज बनेगा । गप = खा ज्या क

इसलिये यदि गप = गछ

तो का = खा ज्या क

∴ ज्या ख = १

∴ ख समकोण है

यदि गछ > गप और < गक तो वृत्त कख को दो विन्दुओं में काटेगा ये दोनो विन्दु ख, ख₂ क की दाहिनी ओर रहेंगे, यदि गख और गख₂ को मिला दें तो दो त्रिभुज कखग और कख₂ग बन जावेंगे जिनमें से प्रत्येक में गकख कोण क कोण के तुल्य है, कग भुजा खा के तुल्य है और एक में गख और दूसरे में गख₂ का के तुल्य है इसप्रकार से दिये हुए अवयवों से दो त्रिभुज बन सकते हैं ।

यदि गछ > गक तो वृत्त कख रेखा को ऐसे दो विन्दु में काटेगा जो क की भिन्न ओर हैं अर्थात एक दाहिनी ओर एक बाईं ओर होगा । गकख₁ त्रिभुज में दिये हुए अवयव नहीं हैं दियी दोनों भुजा इसमें हैं पर कोण क नहीं है क्योंकि इसमें गकख₁ कोण है और यह कोण १८० − क के तुल्य है न कि क के तुल्य परंतु गकख₂ में तीनो दिये हुए अवयव हैं इसलिये इस अवस्था में दिये हुए अवयवों से एकही त्रिभुज बन सकता है । फिर

$$\text{ज्या ख} = \frac{\text{खा}}{\text{का}}\ \text{ज्या क}$$

ऊपर वर्णन कर आये हैं कि यदि $\frac{\text{खा}}{\text{का}}$ ज्याक, १ से अधिक हो तो दिये हुए अवयवों से त्रिभुज बनाना असम्भव है । यदि यह १ के तुल्य हो तो त्रिभुज समकोणत्रिभुज होगा ।

अब यदि $\frac{\text{खा}}{\text{का}}$ ज्या क एक से न्यून हो तो १८०° से न्यून दो ऐसे कोण हैं जिनकी ज्या, $\frac{\text{खा ज्या क}}{\text{का}}$ के तुल्य है इनमें से एक ९०° से अधिक होगा और दूसरा ९०° से न्यून होगा। यदि का, खा से बड़ा हो तो क कोण ख कोण से बड़ा होगा, इसलिये ख समकोण से न्यून होगा, क्योंकि यदि ख के उस मान को लें जो एक समकोण से अधिक है तो क + ख दो समकोण से अधिक होगा पर यह असम्भव है इसलिये दिये अवयवों से एकही त्रिभुज बन सक्ता है। यदि का, खा से न्यून हो तो ख के लिये उसका दोनो मान लेसकते हैं इसलिये दिये अवयवों से दो त्रिभुज बन सकते हैं॥

११८। किसी त्रिभुज की तीनों भुजा का, खा, गा दियी हैं, कोणों को जानना है।

$$\text{यदि सा} = \frac{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}{२} \text{ तो}$$

$$\text{स्पर्}\frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\left\{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}\right\}}$$

$$\text{घा स्पर}\frac{\text{क}}{२} = \frac{१}{२}\{\text{घा}(\text{सा} - \text{खा}) + \text{घा}(\text{सा} - \text{गा})$$

$$- \text{घा सा} - \text{घा}(\text{सा} - \text{का})\}, \text{ इसी प्रकार से}$$

घा स्पर $\frac{\text{ख}}{२}$ निकाल सकते हैं, तब ग निकलेगा॥

उदाहरण।

१। किसी त्रिभुज की एक भुजा दूसरे की दूनी है और इन भुजाओं के बीच का कोण ६०° है तो शेष कोणों को निकालो।

कल्पना करो कि खा = २ गा

$$\text{स्प}\,\frac{१}{२}(\text{ख}-\text{ग})=\frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}}\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{क}}{२}=\frac{\text{गा}}{३\,\text{गा}}\,\text{कोस्प}\,३०$$

$$=\frac{१}{३}\sqrt{३}=\frac{१}{\sqrt{३}}$$

$$\therefore\qquad \frac{१}{२}(\text{ख}-\text{ग})=३०$$

$$\text{ख}-\text{ग}=६०$$

$$\text{पर}\quad \text{ख}+\text{ग}=१२०$$

$$\therefore\quad \text{ख}=९०^\circ$$

$$\text{और}\quad \text{ग}=३०^\circ$$

२। किसी त्रिभुज की भुजाएं ४, ५ और ६ हैं, ख कोण में कितने अंश हैं? यह ज्ञात है कि

घा २ = ·३०१०३, घा कोज्या २७° ५३′ = ९·९४६४०४०,

१′ के लिये अन्तर = ·००००६६९

$$\text{कोज्या}\,\frac{\text{ख}}{२}=\sqrt{\frac{\text{सा}(\text{सा}-\text{खा})}{\text{का}\,\text{गा}}}=\sqrt{\frac{\frac{१५}{२}\times\frac{५}{२}}{२४}}$$

$$=\sqrt{\frac{२५}{३२}}=\frac{१०}{८\sqrt{२}}$$

$$\text{घा कोज्या}\,\frac{\text{ख}}{२}=१०+\text{घा}\,१०-\text{घा}\,८-\frac{१}{२}\,\text{घा}\,२$$

$$=११-\frac{७}{२}\,\text{घा}\,२$$

$$=११-१\cdot०५३६०५०$$

$$=९\cdot९४६३९५$$

कल्पना करो कि कोज्या $\frac{\text{ख}}{२}$ का घा, कोज्या २७°५३′ से य″ न्यून है तो

$$९\cdot९४६४०४०-९\cdot९४६३९५०=\cdot००००९०$$

$$\therefore\qquad \cdot००००६६९ : ००००९० :: ६० : \text{य}$$

$$\text{य} = \frac{\text{९० × ६०}}{\text{६६९}} = \frac{\text{१८००}}{\text{२२३}} = \text{८}'' \; \ldots \; \ldots \; \ldots$$

$$\therefore \quad \text{घा कोज्या } \frac{\text{ख}}{\text{२}} = \text{घा कोज्या २७° ५३′ ८}''$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ख}}{\text{२}} = \text{२७° ५३′ ८}''$$

$$\text{ख} = \text{५५ ४६′ १६}'' \text{ उत्तर}$$

३ । क = ३०°, का = $\sqrt{\text{२}}$, खा = २, शेष अवयव निकालो

४ । ज्या ख = $\frac{\text{१}}{\text{४}}$, का = ५, खा = २ $\frac{\text{१}}{\text{२}}$; क का मान निकालो

५ । क = १५°, का = ४, खा = ४ + $\sqrt{\text{४८}}$, शेष अवयव निकालो

६ । यदि का = ९, खा = ७, ग = ६४°१२′ तो शेष कोणों को निकालो

यह ज्ञात है कि घा २ = ·३०१०३००

घा स्प ११°१६′ = ९·२९९३२१६, और १′ के लिये अन्तर = ·०००६५९८

७ । यदि का = $\frac{\text{३}}{\text{२}}$, खा = $\frac{\text{२७}}{\text{२}}$, ग = ६५° तो शेष कोणों को निकालो

यह दिया है कि घा २ = ·३०१०३००

घा कोस्प ३२°३०′ = १०·१९५८१२७, घा स्प ५१°२८′ = १०·०९८८७६३

घा स्प ५१°२९′ = १०·०९९१३५५

८ । किसी त्रिभुज की दो भुजाएं ८५ और ७५ गज़ हैं और इनके बीच का कोण ७५° है । शेष अवयव निकालो, यह दिया है कि घा १६० = २·२०४१२, घा स्प ५२°३०′ = १०·११५०२

घा स्प ४°४०′ = ८·९१०९

९ । यदि का = १८, खा = २०, गा = २२ तो घा स्प $\frac{\text{क}}{\text{२}}$ का मान

निकालो । यह ज्ञात है कि घा २ = ·३०१०३, घा ३ = ·४७७१२१३

१० । यदि खा = १४, गा = ११, क = ६०° तो ख में कितने अंश हैं? यह ज्ञात है कि घा २ = ·३०१०३, घा ३ = ·४७७१२,

घा स्प ११°४४′२९″ = ९·३१७७४

११ । किसी समकोणत्रिभुज में जिसमें ग समकोण है गा = ६९५३ और खा = ३, ख कोण का मान निकालो । यह दिया है कि

घा ३·४७५ = ·५४०९५४८, घा ६·९५३ = ·८४२१७२२

घा ज्या ४४°५९′१५″ = ९·८४९३९०२, १″ का अंतर = ·००००२१

१२ । $\frac{\text{का}}{\text{खा}} = १\frac{२}{९}$, ग – ६०° शेष कोणों को निकालो । यह दिया है कि

घा ३ = ·४७७१२१३

घा कोस्प ९°४९′ – १०·७६१८७९७ ; १′ के लिये अन्तर = ·०००७५१४

१३ । का = २, गा   ३, घा ज्या क = ९·५२२८७८७,

ग को निकालो । यह ज्ञात है कि घा ३ = ·४७७१२१३

१४ । किसी त्रिभुज में दो भुजायें और उनके सन्मुख के कोणों का अन्तर दिया है त्रिभुज के सब अवयवों को निकालो ।

१५ । यदि ग – ३० , खा – १६ और गा = ८ तो इन अवयवों से एक ही त्रिभुज बन सकता है वा दो ?

१६ । किसी त्रिभुज की भुजा २, $\sqrt{६}$ और $१ + \sqrt{३}$ हैं कोणों को निकालो ।

१७ । किसी त्रिभुज में का, ख और खा + गा दिये हैं शेष अवयवों को निकालो ।

१८ । क से खग भुजा पर एक लम्ब खींचा गया है और इससे खग के दो भाग होते हैं जो क_1 क_2 के तुल्य हैं सिद्ध करो कि ज्या (ख – ग)

$= \frac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{\text{क}_1 + \text{क}_2}$ ज्या क ।

अध्याय ६ ।

क्षेत्रफल आदि ।

११८ । त्रिभुज के क्षेत्रफल निकालने की रीति ।

कल्पना करो कि कखग कोई त्रिभुज है (३०,३१ क्षेत्र) क से लम्ब कघ, खग पर गिराओ ।

$$कखग \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\, कघ \times खग, \text{ परन्तु } कघ = कग\ ज्या\ ग \text{ इसलिये}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\, खग \times कग\ ज्या\ ग = \frac{1}{2}\, का \times खा\ ज्या\ ग \;\cdots\;\cdots\; (अ)$$

$$ज्या\ ग = \frac{2}{का \times खा} \sqrt{\{सा\,(सा-का)\,(सा-खा)\,(सा-गा)\}}$$

$$\text{इसलिये क्षेत्रफल} = \sqrt{\{सा\,(सा-का)\,(सा-खा)\,(सा-गा)\}} \cdots (आ)$$

११९ । त्रिभुज के अन्तर्लग्न वृत्त के व्यासार्द्ध निकालने की रीति ।

कल्पना करो कि कखग दिया हुआ त्रिभुज है (३३ क्षेत्र) और ब अन्तर्लग्न वृत्त का केन्द्र है, कल्पना करो कि र इस वृत्त का व्यासार्द्ध है तो

$$बखग \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\, खग \times बघ = \frac{का\ र}{2}$$

$$बकग \;\cdots\;\cdots\;\cdots = \frac{1}{2}\, कग \times बङ = \frac{खा\ र}{2}$$

$$बकख \;\cdots\;\cdots\;\cdots = \frac{1}{2}\, कख \times बच = \frac{गा\ र}{2}$$

इनको जोड़ो

$$\therefore\ कखग \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\, र\,(का + खा + गा) = र\ सा$$

यदि कखग के क्षेत्रफल के लिये स लिखे तो स = र सा

$$\therefore \quad \text{र} = \frac{\text{स}}{\text{सा}}$$

$$\text{यहां स} = \sqrt{\{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})\}}$$

१२० । त्रिभुज के बहिर्लग्न वृत्त के व्यासार्द्ध निकालने की रीति ।

कल्पना करो कि (३४ क्षेत्र) कखग दिया हुआ त्रिभुज है, इसका बहिर्लग्न वृत्त खींचो कअच एक व्यास खींचो और चग को मिला दो तो कोण कचग = ∠ कखग क्योंकि ये वृत्त में एक आधार पर हैं और कगच एक समकोण है क्योंकि यह वृत्तार्द्ध में है इसलिये

$$\text{कच} = \frac{\text{कग}}{\text{ज्या कचग}} = \frac{\text{कग}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{व्यासार्द्ध} = \frac{\text{खा}}{\text{२ ज्या ख}} = \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या क}} = \frac{\text{गा}}{\text{२ ज्या ग}}$$

$$\text{पर ज्या ख} = \frac{\text{२}}{\text{का गा}} \sqrt{\{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})\}}$$

$$\therefore \text{व्यासार्द्ध} = \frac{\text{का खा गा}}{\text{४} \sqrt{\{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})\}}}$$

यदि कखग त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिये स लिखें तो $\text{व्यासार्द्ध} = \frac{\text{का खा गा}}{\text{४ स}}$

१२१ । किसी त्रिभुज की एक भुजा एक वृत्त को स्पर्श करती है और दूसरी भुजाएं बढ़ाने से स्पर्श करती हैं । तो इस वृत्त का व्यासार्द्ध निकालना है ।

कल्पना करो कि कखग (३५ क्षेत्र) एक त्रिभुज है और चछज वृत्त को खग रेखा स्पर्श करती है और कख कग बढ़ाने से वृत्त को स्पर्श करती हैं, चछज का व्यासार्द्ध निकालना है । कल्पना करो कि इस वृत्त का केन्द्र व है, वछ, वख, वक, वच, वग, वज रेखाओं को खींचो ।

कल्पना करो कि वृत्त का व्यासार्द्ध र है । अब

$$\text{कखघ त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{१}{२}\,\text{घङ} \times \text{कख} = \frac{१}{२}\,\text{र} \times \text{गा}$$

$$\text{कगघ त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{१}{२}\,\text{घज} \times \text{कग} = \frac{१}{२}\,\text{र} \times \text{खा}$$

$$\text{इसलिये कखघग चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{१}{२}\,\text{र}\,(\text{गा} + \text{खा})$$

$$\text{फिर कखग त्रिभुज का क्षे·फ·} = \sqrt{\{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{का})(\text{सा}-\text{खा})(\text{सा}-\text{गा})\}}$$

$= \text{त}$ । और खघग त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{१}{२}\,\text{र} \times \text{का}$

$$\text{इस कारण कखघग चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \text{त} + \frac{१}{२}\,\text{र} \times \text{का}$$

$$\therefore\quad \text{त} + \frac{१}{२}\,\text{र} \times \text{का} = \frac{१}{२}\,\text{र}\,(\text{खा} + \text{गा})$$

$$\frac{१}{२}\,\text{र}\,(\text{खा} + \text{गा} - \text{का}) = \text{त}$$

$$\text{र} = \frac{\text{त}}{\text{सा}-\text{का}} = \frac{\sqrt{\{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{का})\,(\text{सा}-\text{खा})\,(\text{सा}-\text{गा})\}}}{\text{सा}-\text{का}}$$

यदि वृत्त कख को स्पर्श करे, और और भुजाओं को बढ़ाने से स्पर्श करे तो उसका व्यासार्द्ध $= \dfrac{\text{त}}{\text{सा}-\text{गा}}$

यदि कग को स्पर्श करे तो व्यासार्द्ध $= \dfrac{\text{त}}{\text{सा}-\text{खा}}$

१२२ । वृत्तान्तर्गत तुल्यर्जुबहुभुज का क्षेत्रफल आदि निकालना है ।

कल्पना करो कि कख (३६ क्षेत्र) न तुल्य भुज के क्षेत्र की एक भुजा है यह क्षेत्र वृत्तान्तर्गत है व केन्द्र निकालो । कल्पना करो कि वृत्त का

व्यासार्द्ध र है वक और वख को मिलाओ व पर कवख के तुल्य न कोण हैं पर ये सब २π अथवा ३६०° के तुल्य हैं

$$\text{इसलिये कवख} = \frac{२\pi}{न}$$

$$\text{व से वच लंब खींचो तो } \angle \text{ कवच} = \frac{\pi}{न}$$

$$\text{कख} = २\text{ कच} = २\text{ वक ज्या कवच} = २\text{ र ज्या }\frac{\pi}{न}$$

$$\text{इसलिये सब बाहु का योग} = २\text{ न र ज्या }\frac{\pi}{न}$$

$$\text{कवख त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{१}{२}\text{ कव} \times \text{खव} \times \text{ज्या कवख}$$

$$= \frac{१}{२}\text{ र}^२\text{ ज्या }\frac{२\pi}{न}$$

$$\text{इसलिये बहुभुज का क्षेत्रफल} = \frac{१}{२}\text{ न र}^२\text{ ज्या }\frac{२\pi}{न}$$

क्योंकि जितनी भुजा हैं उतनेही कवख के तुल्य त्रिभुज हैं ।

यदि कख लंबाई ज्ञात हो और र जानना हो तो इस रीति से जानेंगे

कल्पना करो कि कख = अ

$$\text{कच} = \frac{\text{अ}}{२} = \text{र ज्या }\frac{\pi}{न}$$

$$\text{र} = \frac{\text{अ}}{२\text{ ज्या }\frac{\pi}{न}}$$

१२३ । वृत्तबहिर्लग्न तुल्यबहुभुज के क्षेत्रफल आदि निकालने की रीति।

कल्पना करो कि कख बहुभुज की एक भुजा है (३० क्षेत्र) यह भुजा ग पर वृत्त को स्पर्श करती है वृत्त का केन्द्र व निकालो कव, खव और वग

वख को मिलादो । वच, कख पर लंब है, कल्पना करो कि बहुभुज में न तुल्य भुजायें हैं तो कोण कवख = $\frac{\text{२}\pi}{\text{न}}$

$$\text{कख} = \text{२ कच} = \text{२ वच स्पर कवच} = \text{२ र स्पर } \frac{\pi}{\text{न}}$$

यहां र वृत्त का व्यासार्द्ध है ।

$$\text{इसलिये भुजाओं का योग} = \text{२ न र स्पर } \frac{\pi}{\text{न}}$$

$$\text{कवख त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\text{१}}{\text{२}}\ \text{कख} \times \text{वच} = \text{र}^{\text{२}}\ \text{स्पर } \frac{\pi}{\text{न}}$$

$$\text{इसलिये बहुभुज का क्षेत्रफल} = \text{न र}^{\text{२}}\ \text{स्पर } \frac{\pi}{\text{न}}$$

यदि कख लम्बाई ज्ञात हो और र जानना हो तो इस रीति से जानेंगे कल्पना करो कि कख = अ

$$\text{कच} = \frac{\text{अ}}{\text{२}} = \text{र स्पर } \frac{\pi}{\text{न}}$$

$$\therefore \quad \text{र} = \frac{\text{अ}}{\text{२ स्पर } \frac{\pi}{\text{न}}}$$

१२४ । वृत्त के क्षेत्रफल के निकालने की रीति ।

वृत्तबहिर्लग्न न तुल्य भुज के क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \text{न र}^{\text{२}}\ \text{स्पर } \frac{\pi}{\text{न}} = \frac{\pi\ \text{र}^{\text{२}}}{\text{कोज्या } \frac{\pi}{\text{न}}} \times \frac{\text{ज्या } \frac{\pi}{\text{न}}}{\frac{\pi}{\text{न}}}$$

अब कल्पना करो कि न को बढ़ाते हैं तो ज्यों २ क्षेत्र की भुजा की संख्या को बढ़ाते हैं त्यों २ बहुभुजक्षेत्र और वृत्त के क्षेत्रफल में कम अंतर होता जाता है इसलिये यदि न बहुत बढ़ाया जावे तो बहुभुज का क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल के बहुत निकट होगा ।

जब न बहुत बड़ा है तो कोज्या $\frac{\pi}{न}$ अर्थात बहुत छोटे कोण की कोज्या १ के बहुत निकट है

इसलिये कोज्या $\frac{\pi}{न}$ = १ लिख सकते हैं और

$$\frac{ज्या \frac{\pi}{न}}{\frac{\pi}{न}} = १$$

इसलिये जिस वृत्त का व्यासार्ध र है उसका क्षेत्रफल $\pi र^२$ है।

१८५। वृत्तखण्ड के क्षेत्रफल के निकालने की रीति।

कल्पना करो कि कखग वृत्तखण्ड है (३८ क्षेत्र) इसका क्षेत्रफल जानना है, कल्पना करो कि ∠ कखग = य अर्थात य कखग कोण का चक्रीय माप है तो

$$\frac{कखग \text{ का क्षेत्रफल}}{वृत्त \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{य}{२\pi}$$

$$\therefore कखग \text{ का क्षेत्रफल} = \pi र^२ \times \frac{य}{२\pi} = \frac{र^२ य}{२}$$

कग चाप की लम्बाई = यर इसलिये व्यासार्द्ध के आधे को चाप की लम्बाई से गुणने से वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल मिलता है॥

उदाहरण।

१। किसी त्रिभुज की भुजाएं १०,१४ और १६ गज़ हैं इसका क्षेत्रफल क्या होगा?

$$क्षेत्रफल = \sqrt{\{सा (सा - का) (सा - खा) (सा - गा)\}}$$
$$= \sqrt{(२० \times १० \times ६ \times ४)} = २\sqrt{(४ \times ५ \times ६०)}$$
$$= ४\sqrt{(२५ \times १२)} = ४० \sqrt{३} \quad \text{उत्तर}$$

२। वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना है।

कल्पना करो कि कखगछ वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज है (३९ क्षेत्र)

$$\therefore \quad क + ग = १८०^\circ$$

$$\therefore \quad ज्या\ ग = ज्या\ क$$

कल्पना करो कि कख = का, खग = खा, गछ = गा, छक = छा

कखगछ का क्षेत्रफल = क्षे·फ· कखछ + क्षे·फ· खगछ

$$= \frac{१}{२}\ काछा\ ज्या\ क + \frac{१}{२}\ खागा\ ज्या\ क$$

$$= \frac{१}{२}\ (काछा + खागा)\ ज्या\ क$$

$$२\ काछा\ कोज्या\ क = का^२ + छा^२ - खछ^२$$

$$२\ खागा\ कोज्या\ ग = -२\ खागा\ कोज्या\ क = खा^२ + गा^२ - खछ^२$$

$$\therefore २\ (काछा + खागा)\ कोज्या\ क = का^२ + छा^२ - खा^२ - गा^२$$

$$\therefore कोज्या\ क = \frac{का^२ + छा^२ - खा^२ - गा^२}{२\ (काछा + खागा)}$$

$$१ - कोज्या\ क = १ - \frac{का^२ + छा^२ - खा^२ - गा^२}{२\ (काछा + खागा)}$$

$$= \frac{(खा + गा)^२ - (का - छा)^२}{२\ (काछा + खागा)}$$

$$१ + कोज्या\ क = १ + \frac{का^२ + छा^२ - खा^२ - गा^२}{२\ (काछा + खागा)} = \frac{(का + छा)^२ - (खा - गा)^२}{२\ (काछा + खागा)}$$

$$ज्या^२क = १ - कोज्या^२क$$

$$= \frac{(खा + गा + का - छा)(खा + गा + छा - का)(का + खा + छा - गा)(का + गा + छा - खा)}{४\ (काछा + खागा)^२}$$

कल्पना करो कि २सा = का + खा + गा + छा

$$\therefore ज्या^२क = \frac{(२सा - २छा)(२सा - २का)(२सा - २गा)(२सा - २खा)}{४\ (काछा + खागा)^२}$$

$\therefore$ ज्या क $= \dfrac{२}{काछा + खागा} \sqrt{\{(सा-का)(सा-खा)(सा-गा)(सा-छा)\}}$

$\therefore$ कखगघ का क्षेत्रफल $= \sqrt{\{(सा-का)(सा-खा)(सा-गा)(सा-छा)\}}$

३ । त्रिभुज के बहिर्लग्नवृत्त का व्यासार्द्ध

$$= \frac{१}{८}(का + खा + गा)\, छेरे \frac{क}{२}\, छेरे \frac{ख}{२}\, छेरे \frac{ग}{२}$$

कल्पना करो कि वृत्त का व्यासार्ध र है तो

$$२ र = \frac{का}{ज्या क} = \frac{खा}{ज्या ख} = \frac{गा}{ज्या ग}$$

$$\therefore\ २ र = \frac{का + खा + गा}{ज्या क + ज्या ख + ज्या ग}$$

$$ज्या क + ज्या ख = २ ज्या \frac{क + ख}{२} कोज्या \frac{क - ख}{२}$$

$$= २ कोज्या \frac{ग}{२} कोज्या \frac{क - ख}{२}$$

$$ज्या क + ज्या ख + ज्या ग = २ कोज्या \frac{ग}{२}\left(कोज्या \frac{क - ख}{२} + कोज्या \frac{क + ख}{२}\right)$$

$$= ४ कोज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२}$$

$$\therefore\ २ र = \frac{का + खा + गा}{४ कोज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२}}$$

$$\therefore\ र = \frac{१}{८}(का + खा + गा)\, छेरे \frac{क}{२}\, छेरे \frac{ख}{२}\, छेरे \frac{ग}{२}$$

४ । एक तुल्य बाहु के पञ्चकोण और एक तुल्य बाहु के दशकोण के क्षेत्रफल तुल्य हैं यह सिद्ध करना है कि इन क्षेत्रों की भुजाओं का सम्बन्ध $= \dfrac{\sqrt[४]{२०}}{१}$

कल्पना करो कि कखग पंचकोण के ५ त्रिभुजों में से एक है (४० चित्र) कख = य, गछ को कख पर लम्ब खींचो।

$$\angle \text{कगख} = \frac{2\pi}{५}$$

$$\therefore \quad \text{कगछ} = \frac{\pi}{५}$$

पंचकोण का क्षेत्रफल = ५ कखग = ५ कछ × गछ

$$= ५ \times \frac{य}{२} \cdot \frac{य}{२} \text{ कोस्प } \frac{\pi}{५} = ५ \times \frac{य^२}{४} \text{ कोस्प } \frac{\pi}{५}$$

इसी प्रकार से यदि व दशकोण का एक भुज हो तो इसका क्षेत्रफल

$$= १० \times \frac{व^२}{४} \text{ कोस्प } \frac{\pi}{१०}$$

$$\therefore \quad १० \times \frac{व^२}{४} \text{ कोस्प } \frac{\pi}{१०} = ५ \times \frac{य^२}{४} \text{ कोस्प } \frac{\pi}{५}$$

$$\therefore \quad \frac{य^२}{व^२} = \frac{२ \text{ स्प } \frac{\pi}{५}}{\text{स्प } \frac{\pi}{१०}} = \frac{४}{१ - \text{स्प}^२ १८^\circ}$$

यह सिद्ध कर सकते हैं कि $\text{स्प}^२ १८^\circ = \frac{३ - \sqrt{५}}{\sqrt{५} + ५}$

$$\therefore \quad १ - \text{स्प}^२ १८^\circ = १ - \frac{३ - \sqrt{५}}{५ + \sqrt{५}} = \frac{२(\sqrt{५} + १)}{\sqrt{५}(\sqrt{५} + १)} = \frac{२}{\sqrt{५}}$$

$$\therefore \quad \frac{य^२}{व^२} = ४ \div \frac{२}{\sqrt{५}} = २\sqrt{५} = \sqrt{२०}$$

$$\therefore \quad \frac{य}{व} = \sqrt[४]{२०} \quad \text{उत्तर}$$

५। किसी त्रिभुज की भुजाएं १२, १४ और १६ हैं त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या है?

६। किसी त्रिभुज के दो कोण ३०° औ ४५° हैं और अन्तर्गत भुजा = १५ गज़ तो त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालना है।

७ । किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल =

$$\frac{२\, का\, खा\, गा}{का + खा + गा} कोज्या \frac{क}{२}\, कोज्या \frac{ख}{२}\, कोज्या \frac{ग}{२}$$

८ । किसी त्रिभुज की भुजाएं ३, ५, ६ हैं इसके अन्तर्लग्न और बहिर्लग्न वृत्तों के व्यास में क्या सम्बन्ध होगा?

९ । किसी त्रिभुज के अन्तर्लग्न और बहिर्लग्न वृत्त के व्यास का योग = का कोस्प क + खा कोस्प ख + गा कोस्प ग ।

१० । यदि $य_१\, य_२\, य_३$ ऐसे वृत्तों के क्षेत्रफल हों जो किसी त्रिभुज की एक भुजा को और शेष दो भुजाओं को बढ़ाने से स्पर्श करते हैं और यदि य अन्तर्लग्न वृत्त का क्षेत्रफल हो तो यह सिद्ध करना है कि

$$\frac{१}{\sqrt{य}} = \frac{१}{\sqrt{य_१}} + \frac{१}{\sqrt{य_२}} + \frac{१}{\sqrt{य_३}}$$

११ । कखगघ वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज है यह सिद्ध करो कि

कग ज्या क = खघ ज्या ख

१२ । त्रिभुज के अन्तर्लग्न वृत्त के क्षेत्रफल और त्रिभुज के क्षेत्रफल में वही सम्बन्ध है जो π और कोस्प $\frac{क}{२}$ कोस्प $\frac{ख}{२}$ कोस्प $\frac{ग}{२}$ में है ।

१३ । यदि र त्रिभुज के बहिर्लग्न वृत्त का व्यासार्द्ध हो तो

का कोज्या क + खा कोज्या ख + गा कोज्या ग = ४ र ज्या क ज्या ख ज्या ग

१४ । यदि र त्रिभुज के बहिर्लग्न वृत्त का व्यासार्द्ध हो और $र_१$ अन्तर्लग्न वृत्त का व्यासार्द्ध हो तो इन दोनों वृत्तों के केन्द्र के बीच की दूरी = $\sqrt{(र^२ - २ र र_१)}$

१५ । यदि र, $र_१$ बहिर्लग्न और अन्तर्लग्न वृत्त के व्यासार्द्ध हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल = $र र_१$ (ज्या क + ज्या ख + ज्या ग)

१६ । यदि कखग त्रिभुज के कोणों से प,फ,ब लंबाई की ऐसी रेखा खींची जावें जो क,ख,ग कोणों का तुल्य भाग करती हों और बहिर्लग्न वृत्त की परिधि तक खींची हों तो

$$\text{प कोज्या}\frac{\text{क}}{२} + \text{फ कोज्या}\frac{\text{ख}}{२} + \text{ब कोज्या}\frac{\text{ग}}{२} = \text{का} + \text{खा} + \text{गा}$$

१७ । यदि र बहिर्लग्न वृत्त का व्यासार्ध हो और $\text{ल}_१, \text{ल}_२, \text{ल}_३$ उसके केन्द्र से त्रिभुज की भुजाओं पर के लंब की लंबाई हों तो

$$\text{र}^३ - (\text{ल}_१^२ + \text{ल}_२^२ + \text{ल}_३^२)\,\text{र} = २\,\text{ल}_१\,\text{ल}_२\,\text{ल}_३$$

१८ । २न भुजा का एक क्षेत्र वृत्तान्तर्गत है इसको न भुजाएं का के तुल्य हैं और शेष न भुजाएं खा के तुल्य हैं, यह सिद्ध करो कि वृत्त का व्यासार्ध

$$= \frac{१}{२\,\text{ज्या}\frac{\pi}{\text{न}}}\sqrt{(\text{का}^२ + २\,\text{का}\,\text{खा}\,\text{कोज्या}\frac{\pi}{\text{न}} + \text{खा}^२)}$$

१९ । किसी समत्रिबाहुत्रिभुज के कोण तीन समानान्तर रेखा पर हैं इनमे से बीच की रेखा बाहर की रेखाओं से प, फ दूरी पर है तो सिद्ध करो कि त्रिभुज की एक भुजा $= २\sqrt{(\frac{\text{प}^२ + \text{पफ} + \text{फ}^२}{३})}$

२० । उन सब त्रिभुजों के क्षेत्रफल जो किसी वृत्त के अन्तर्लग्न हो सकते हैं और उनके भुजाओं के योग का सम्बन्ध प्रत्येक ऐसे त्रिभुज के लिये एकही होगा ।

अध्याय १० ।

त्रिकोणमिति के द्वारा दूरी और ऊंचाई मापने की रीति ।

१२६ । त्रिकोणमिति के द्वारा त्रिभुज बना कर ऊंचाई और दूरी जानते हैं जैसा कि वर्णन किया जायगा । दूरी और ऊंचाई जानने के लिये ऐसे त्रिभुज बनाए जाते हैं कि जिनके ज्ञात अवयव से अज्ञात वस्तु निश्चित होती हैं । यह जानना चाहिये कि यदि कोई दो विन्दु लें और इनको मिला दें और इन विन्दुओं को दृष्टि से मिलावें तो इस त्रिभुज के उस कोण को जो दो विन्दु के मिलाने वाली रेखा के सन्मुख है यन्त्रों के द्वारा जान सकते हैं इस कोण को दोनो विन्दु के सन्मुख का दृष्टिस्थ कोण कहते हैं ।

कल्पना करो कि क ख, दो विन्दु हैं (४१ क्षेत्र) जिनको ग पर से देखते हैं तो कगख कोण को पष्ठनामक यंत्र से जान सकते हैं ।

यदि च एक वस्तु हो (४२ क्षेत्र) और अक तिर्य्यक् भूमि हो तो यदि चक लम्ब खींचें और अ (देखने के स्थान) से अच,अक रेखा खींचें तो चअक कोण को यंत्रद्वारा जान सकते हैं और इसे च का उन्नतिकोण कहते हैं ॥

१२७ । किसी वस्तु की समभूमि से ऊंचाई जानना है जिसके मूल तक जा सकते हैं ।

कल्पना करो कि गख अज्ञात ऊंचाई है (४३ क्षेत्र) तिर्य्यक् समतल में कोई स्थान क लो और ग मूल को क से मिलाओ । कग की दूरी मापो, कल्पना करो यह द है ।

खकग कोण को भी यंत्र से जान सकते हैं कल्पना करो कि इसमें क अंश हैं ।

अब कखग त्रिभुज में क कोण, ग कोण और गक भुज ज्ञात हैं इस लिये शेष अवयव जान सकते हैं, इस कारण गख की ऊंचाई जानेंगे ।

$$\text{स्पर्श क} = \frac{\text{खग}}{\text{कग}} = \frac{\text{खग}}{\text{द}}$$

$\therefore$ खग = द स्पर्श क उत्तर ।

१८८ । किसी ऐसी वस्तु की ऊंचाई जानना है कि जिसके मूल तक नहीं जा सकते और यह जानना है कि इसकी दूरी प्रथम दृष्टि-स्थान से कितनी है ॥

कल्पना करो कि खग किसी वस्तु की ऊंचाई है (४४ क्षेत्र) पहिले क से ग को देखते हैं पर यदि सीधे ख की ओर चलें तो केवल घ तक जा सकते हैं। अब पहिले क पर ग का उन्नति कोण देखो फिर कघ की लम्बाई मापो। घ पर जाकर घ से ग का उन्नति कोण निकालो।

अब कगघ त्रिभुज में क कोण और कघग कोण ज्ञात हैं और कघ भुजा ज्ञात है इसलिये शेष अवयव जान सकते हैं, इस कारण गघ ज्ञात हुआ। गघख त्रिभुज में गघ भुज और घ और ख कोण ज्ञात हैं (ख = ९०°) इसलिये शेष अवयव जान सकते हैं, इसलिये गख और घख ज्ञात होंगे। वस्तुतः कख और गख इस प्रकार से निकलेंगे

$$\frac{\text{ज्या गकघ}}{\text{ज्या कगघ}} = \frac{\text{गघ}}{\text{कघ}}$$

$$\therefore \text{गघ} = \frac{\text{ज्या क}}{\text{ज्या (घ − क)}} \times \text{कघ}$$

$$\text{कोज्या घ} = \frac{\text{घख}}{\text{गघ}}, \ \text{ज्या घ} = \frac{\text{गख}}{\text{घग}}$$

$$\therefore \text{गख} = \text{गघ ज्या घ} = \frac{\text{ज्या क ज्या घ}}{\text{ज्या (घ − क)}} \text{कघ}$$

$$\text{घख} = \text{गघ कोज्या घ} = \frac{\text{ज्या क कोज्या घ}}{\text{ज्या (घ − क)}} \text{कघ}$$

यदि सीधे ख की ओर न जासकें तो इस प्रकार से ऊंचाई जानेंगे (४५ क्षेत्र) क से किसी ओर एक लम्बाई कघ मापो, क पर गकख कोण और गकघ कोण को मापो और घ पर कघग और गघख कोण मापो। अब कगघ त्रिभुज में ∠ गकघ और ∠ कघग ज्ञात हैं और कघ भुजा जानी है इसलिये गघ ज्ञात होगा, अब गघख त्रिभुज में

गख = गघ ज्या गघख

घख = गघ कोज्या गघख

इसलिये गख और घख ज्ञात हुए।

१०९। यह जानना है कि ऐसे दो स्थानों की आपस में क्या दूरी है जिन पर जा नहीं सकते।

कल्पना करो कि च, छ दो स्थान हैं (४६ क्षेत्र) क ख तक जा सकते हैं कल्पना करो कि क, ख, से च छ दोनों स्थानों को देख सकते हैं क पर ∠ चकछ और ∠ छकख मापो और यदि क, छ, च एक समतल में न हों तो चकख कोण भी मापो।

ख पर ∠ चखक मापो और कख की लम्बाई मापो।

अब कखच त्रिभुज में कख भुजा और चकख और चखक कोण ज्ञात हैं इसलिये चक जान सकते हैं। कखछ त्रिभुज में ∠ छकख, ∠ कखछ और कख भुजा ज्ञात हैं इसलिये कछ जान सकते हैं।

चकछ त्रिभुज में कच, कछ भुजाएं और चकछ कोण ज्ञात हैं इसलिये चछ जान पड़ता है॥

उदाहरण।

१। क एक पहाड़ का शिखर है (४८ क्षेत्र) और ख स्थान से जो कि समभूमि पर है, इसका उन्नति कोण ६०° है, किसी ओर समतल का प्रावण्य ३०° है, इस पर १ मील जाने से ग स्थान पर कगख कोण १३५° मिलता है। पर्वत की ऊंचाई जानना है।

कखग त्रिभुज में

$$\frac{\text{कख}}{\text{खग}} = \frac{\text{ज्या } १३५}{\text{ज्या खकग}} = \frac{\text{ज्या } १३५}{\text{ज्या } (१३५ + ३०)} \text{ क्योंकि कखग} = ३०^\circ$$

$$\therefore \text{ कख} = \text{खग} \frac{\text{ज्या } ४५^\circ}{\text{ज्या } १५^\circ}$$

$$\text{ऊंचाई} = \text{कख ज्या } ६० = \text{खग} \cdot \frac{\text{ज्या } ६० \text{ ज्या } ४५}{\text{ज्या } १५}$$

$$= १ \text{ मील} \times \frac{\frac{\sqrt{३}}{२} \times \frac{१}{\sqrt{२}}}{\frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}} = १ \text{ मील} \times \frac{\sqrt{३}}{\sqrt{३} - १}$$

$$= १७६० \text{ गज़} \times \frac{\sqrt{३}(\sqrt{३} + १)}{२} = ८८० (३ + \sqrt{३}) \text{ गज़ उत्तर।}$$

२। एक समय में किसी सीधे खंभ की छाया की लम्बाई क है और दूसरे समय ख इन दोनों समयों में सूर्य्य के उन्नति कोण में य का अंतर है यदि ह बांस की ऊंचाई हो तो

$$\text{ह}^२ + \text{ह} (\text{क} - \text{ख}) \text{ कोस्प य} + \text{कख} = 0$$

कल्पना करो कि जब छाया की लंबाई क है तब सूर्य्य का उन्नति कोण प है (४८ चित्र) और जब लंबाई ख है तब फ है, क > ख

$$\text{इसलिये स्प प} = \frac{\text{ह}}{\text{क}}, \text{ स्प फ} = \frac{\text{ह}}{\text{ख}}$$

$$\text{स्प य} = \text{स्प } (\text{फ} - \text{प}) = \frac{\text{स्प फ} - \text{स्प प}}{१ + \text{स्प प स्प फ}} = \frac{\frac{\text{ह}}{\text{ख}} - \frac{\text{ह}}{\text{क}}}{१ + \frac{\text{ह}^२}{\text{कख}}} = \frac{(\text{क} - \text{ख})}{\text{ह}^२ + \text{कख}}$$

$$\therefore \text{ ह}^२ + \text{ह} (\text{क} - \text{ख}) \text{ कोस्प य} + \text{कख} = 0$$

३। क ख, ग, समभूमि पर तीन स्थान हैं (४९ चित्र) जिनपर से किसी ऊंचे स्थान प का उन्नति कोण एकही है, प की ऊंचाई जानना है।

क्योंकि प का उन्नति कोण ग, ख, क पर से एकही है इसलिये वे विन्दु एक वृत्ताधार सूचि के तल पर स्थित हो सकते हैं जिसका शिखर प है प से समभूमि पर एक लंब खींचो तो ब कखग के वहिर्लग्न वृत्त का केन्द्र होगा। कल्पना करो कि प का उर्न्नति कोण य है, और का, खा, गा, कखग त्रिभुज की भुजाएं हैं तो

$$\text{वक} = \frac{\text{का खा गा}}{४\sqrt{\text{मा}(\text{मा}-\text{का})(\text{मा}-\text{खा})(\text{मा}-\text{गा})}}$$

पर बप = वक स्पर्श य

$$\therefore \text{बप} = \frac{\text{का खा गा स्पर्श य}}{४\sqrt{\text{मा}(\text{मा}-\text{का})(\text{मा}-\text{खा})(\text{मा}-\text{गा})}}$$

४। एक पहाड़ की चोटी समभूमि से ४५ ऊंची है उस समतल पर जिसका प्रावण्य ३०° है एक मील जाने से शिखर का उन्नति कोण ६०° है पहाड़ की ऊंचाई क्या है?

५। किसी नदी के तीर से उसके दूसरे तट पर के एक वृक्ष का उन्नति कोण क है, अ गज़ पीछे हटने से उन्नतिकोण ख हो जाता है, उस वृक्ष की ऊंचाई और नदी का पाट निकालना है।

६। किसी समभूमि पर तीन स्थानों की दूरी आपस में १८, १६, २२ है और प्रत्येक पर से एक वस्तु का उन्नतिकोण ४५° है इसकी ऊंचाई क्या है?

७। किसी स्थान अ से एक वृक्ष का उन्नतिकोण ३०° है, अ वृक्ष से ठीक दक्षिण है, क, अ से २० गज़ पश्चिम है और इससे उन्नतिकोण १८° है, तो वृक्ष की ऊंचाई क्या है?

८। किसी पहाड़ का उन्नतिकोण ३०° है ६०० गज़ और निकट जाने से उन्नतिकोण ६०° है उसकी ऊंचाई क्या है? यह ज्ञात है कि

घा ३ = ·४७७१२

घा ५१ = १·७०७५७

घा ५२ = १·७१६००

९ । १५० फुट ऊंचे वृक्ष की छाया समभूमि पर ७५ फुट लंबी है, सूर्य्य का उन्नतिकोण क्या है? घा २ = ·३०१०३

घा स्प ६३°२६′ = १०·३००९९९४

घा स्प ६३°२७′ = १०·३०१३१५३

१० । १०० फुट ऊंचे वृक्ष पर से एक पहाड़ के शिखर का उन्नति कोण ३०° है और वृक्ष के मूल से ६०° है, पहाड़ की ऊंचाई क्या है?

११ । ६ फुट ऊंची एक वस्तु किसी वृक्ष के ऊपर है, समभूमि पर वृक्ष के मूल से १०० फुट पर से इस वस्तु के सन्मुख का कोण ऐसा है कि इसकी स्पर्शरेखा ·०१५, वृक्ष की ऊंचाई क्या है?

१२ । किसी टीले पर एक खांभ है जिसके शिखर का उन्नतिकोण ६०° है और मूल का उन्नतिकोण ३०° है यह सिद्ध करो कि खाम की ऊंचाई टीले की ऊंचाई से दूनी है।

१३ । समभूमि पर क और ख दो अगम्य स्थान हैं और च छ ऐसे स्थान हैं जिन प्रत्येक पर से कख के साम्हने का कोण ३०° है। च पर खछ के साम्हने का कोण १९°१५′ है और छ पर कच के साम्हने का कोण ४०°४५′ है यह सिद्ध करो कि $\text{कख} = \frac{\text{चछ}}{\sqrt{\text{३}}}$

१४ । ३२ फुट ऊंचे पर के एक वस्तु को ६ फुट ऊंचा मनुष्य १० मील से देख सकता है पर इस से अधिक दूरी से यह नहीं दिखाई देती तो सिद्ध करो कि पृथ्वी का व्यासार्द्ध ४०१७·७९ मील के निकट है।

त्रिकोणमितीय प्रश्न ।

क

१। किसी समद्विबाहुत्रिभुज में शीर्ष कोण में क अंश हैं तो आधार पर के प्रत्येक कोण का चक्रीय माप क्या होगा?

२। यह सिद्ध करो कि $\frac{(\text{छेरे य} + \text{कोछेरे य})^2}{\text{छेरे}^2 \text{य} + \text{कोछेरे}^2 \text{य}} = १ + २ \text{ ज्याय कोज्या य}$

३। $\frac{२}{\text{ज्या य}} - \text{कोस्प य} = \sqrt{३}$ में य का मान निकालो।

४। यदि $\text{स्परे} \frac{\text{क}}{२} = \text{स्परे}^3 \frac{\text{ख}}{२}$ और स्परे ख = २ स्परे फ

तो २ फ = क + ख

५। सिद्ध करो कि $\text{छेरे}(\text{य} \pm \text{फ}) = \frac{\text{छेरे य छेरे फ}}{१ \pm \text{स्परे य स्परे फ}}$

६। यदि $\text{स्प क} = \frac{१}{७}$ और $\text{स्प ख} = \frac{१}{३}$ तो क + २ ख = ४५°

७। घा २·७ = ·४३१३६३८, घा ५·१०२२९१८ = ·७१३०२०२

तो $२७^{\frac{१}{५}}$ का मान निकालो।

८। किसी त्रिभुज में का कोज्या २ ख + २ खा कोज्या क कोज्या ख + का कोज्या २ ग + २ गा कोज्या क कोज्या ग = ०

९। किसी त्रिभुज में का, क और (का + खा) दिये हैं ख और ग निकालो।

१०। किसी त्रिभुज में $\frac{\text{ज्या क}}{\text{ज्या ख ज्या ग}} + \frac{\text{ज्या ख}}{\text{ज्या क ज्या ग}} + \frac{\text{ज्या ग}}{\text{ज्या क ज्या ख}}$
$= २ (\text{कोस्परे क} + \text{कोस्परे ख} + \text{कोस्परे ग})$

ख

१ । सिद्ध करो कि $\frac{\text{ज्या ३ क} + \text{कोज्या ३ क}}{\text{ज्या ३ क} - \text{कोज्या ३ क}}$

$$+ \frac{१ + २ \text{ ज्या २ क}}{१ - २ \text{ ज्या २ क}} \text{स्पर्श} \left(\frac{\pi}{४} - \text{क} \right) = 0$$

२ । ज्यों ज्यों क, 0° से १८0° तक बढ़ता है त्यों त्यों $\frac{\text{ज्या} (\pi \text{ कोज्या क})}{\text{कोज्या} (\pi \text{ ज्या क})}$ के चिह्न और परिमाण में क्या भेद होता है ?

३ । इन समीकरणों में से क और ख निकाल डालो

$$\text{च ज्या}^2 \text{ क} + \text{छ कोज्या}^2 \text{ क} = \text{प}$$

$$\text{छ ज्या}^2 \text{ ख} + \text{च कोज्या}^2 \text{ ख} = \text{फ}$$

$$\text{च स्प क} = \text{छ स्प ख}$$

४ । यदि क ख ग किसी त्रिभुज के कोण हैं और २ ज्या ख = ज्या क + ज्या ग तो ज्या $\frac{\text{क}}{२}$: ज्या $\frac{\text{ग}}{२}$ :: ज्या $\frac{\text{क} - \text{ख}}{२}$: ज्या $\frac{\text{ख} - \text{ग}}{२}$

५ । सिद्ध करो कि $\text{स्प}^{-1} \frac{३}{५} + \text{कोस्प}^{-1} \frac{७}{३} = \text{कोस्प}^{-1} \frac{१३}{१२}$

६ । यदि किसी त्रिभुज में $१ + \text{कोस्प} \left(\frac{\pi}{४} - \text{ख} \right) = \frac{२}{१ - \text{स्प क}}$ और उसका क्षेत्रफल $= \frac{\text{गा}^2}{४}$ तो त्रिभुज समकोणद्विबाहु होगा ।

७ । किसी त्रिभुज में

$$\text{कोस्प क} + \text{कोस्प ख} + \text{कोस्प ग} > \frac{१}{२} (\text{कोछे क} + \text{कोछे ख} + \text{कोछे ग})$$

८ । यदि वृत्तान्तर्गत पञ्चकोण की प्रत्येक भुजा = १ तो वृत्त का व्यासार्द्ध $\sqrt{\frac{५ + \sqrt{५}}{१0}}$ के तुल्य होगा ।

९ । किसी देश की बस्ती १०७ बरस में तिगुनी होजाती है तो एक बरस में दस लाख मनुष्य में कितने बढ़ेंगे ? यह ज्ञात है कि

घा ३ = ·४७७१२१३ और घा १०११०५ = ५·००४७७१२

१० । क,ख,ग तिर्य्यक् समतल पर तीन ऐसे बिन्दु हैं कि जहां से तीन पहाड़ की चोटियों में से दो दो एक दिशा में दिखलाई देती हैं यदि चोटियों की ऊंचाई य, ब, र हो तो

$$\frac{\text{य}(\text{ब}-\text{र})}{\text{खग}} = \frac{\text{ब}(\text{र}-\text{य})}{\text{गक}} = \frac{\text{र}(\text{य}-\text{ब})}{\text{कख}}$$

ग

१ । क का दो ऐसा भाग करो कि उनकी ज्या का संबन्ध $\frac{\text{म}}{\text{न}}$ हो।

२ । यदि $\frac{\text{ज्या}(\text{क}-\text{ख})}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{ज्या}(\text{क}+\text{य})}{\text{ज्या य}}$ तो यह सिद्ध करना है कि

$$\text{कोस्प ख} - \text{कोस्प य} = \text{कोस्प}(\text{क}+\text{य}) + \text{कोस्प}(\text{क}-\text{ख})$$

३ । यदि $\text{ज्या य} + \text{ज्या २य} = \text{म}$

$\text{कोज्या य} + \text{कोज्या २य} = \text{न}$

तो $(\text{म}^2 + \text{न}^2)^2 - ३(\text{म}^2 + \text{न}^2) - २\text{न} = ०$

४ । इस समीकरण में से क का मान निकालो

$$\text{स्प}^{-१}\frac{१}{\text{क}-१} - \text{स्प}^{-१}\frac{१}{\text{क}+१} = \frac{\pi}{१२}$$

५ । यदि क,ख,ग, किसी त्रिभुज के कोण हों और $\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{२} + \text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{२} = २\,\text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{२}$ तो यह सिद्ध करो कि $\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{२}\,\text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{२} = ३$

६ । यदि य = ० तो $\frac{\text{स्प}^2\text{य}}{\text{छे २य} - १}$ किसके तुल्य होगा ?

घ

७। यदि

$$\frac{क(ख+ग-क)}{घा\,क}=\frac{ख(क+ग-ख)}{घा\,ख}=\frac{ग(क+ख-ग)}{घा\,ग}$$

तो $$ख^{ग}ग^{ख}=क^{ग}ग^{क}=क^{ख}ख^{क}$$

८। किसी त्रिभुज कखग में का = ७०, खा = ३५ और ग = ३६° ५२′१२″ शेष कोणों को निकालो, यह ज्ञात है कि घा ३ = ·४७७१२१३ घा कोस्प १८° २६′६″ = १०·४७७१२१३

९। वृत्तवहिर्लीन वर्ग का क्षेत्रफल वृत्तान्तर्गत द्वादशकोण के क्षेत्रफल का $\frac{४}{३}$ है।

१०। दो बांस कख और चछ किसी नदी के तीर पर इस प्रकार से गड़े हैं कि कच = कख, चछ इतना ऊंचा है कि क के ठीक साम्हने दूसरे तीर पर यदि एक स्थान अ ले तो यहां से कख और चछ के साम्हने के कोण तुल्य होंगे सिद्ध करो कि नदी का पाट $=\frac{कख^{२}}{\sqrt{(चछ^{२}-कख^{२})}}$ और अ पर कछ, खच के साम्हने के कोण तुल्य हैं।

घ

१। यदि ज्या ५क − ज्या ३क = स्प २क − स्प क तो यह सिद्ध करो कि ज्या ८क = ४ ज्या क।

२। स्प य स्प ३ य = १ में य का मान निकालो।

३। क कोज्या फ + ख कोज्या य = ख

क ज्या फ − ख ज्या य = छ

$$२\,ज्या^{२}\frac{फ+य}{२}=कोज्या\frac{\pi}{३}$$

इनमें से फ और य निकाल डालना है।

४ । यदि $न\sqrt{२}\,ज्या\frac{क}{२} = ज्या\left(\frac{\pi}{४}+\frac{क}{२}\right)$ और

$ज्या\,क = \frac{ज्या(ख-ग)}{ज्या(ख+ग)}$ तो $\frac{स्प\,ग}{स्प\,ख} = \left(\frac{१}{न}-१\right)^{२}$

५ । किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= ज्या\frac{क}{२}\,ज्या\frac{ख}{२}\,ज्या\frac{ग}{२}\times\left(\frac{का^{२}}{ज्या\,क}+\frac{खा^{२}}{ज्या\,ख}+\frac{गा^{२}}{ज्या\,ग}\right)$$

६ । किसी वृत्त का व्यास कख दोनों ओर च और छ तक बढ़ाया गया है इस प्रकार से कि चक = कख = खछ यदि वृत्त में बिन्दु प लें तो यह सिद्ध करना है कि $स्प\,चपक \times स्प\,खपछ = \frac{१}{४}$

७ । किसी त्रिभुज में यदि $\frac{१}{का}+\frac{१}{गा}=\frac{२}{खा}$

तो $\left(\frac{ज्या\frac{क}{२}}{ज्या\frac{ग}{२}}\right)^{२} = \frac{कोज्या\,ख - कोज्या\,क}{कोज्या\,ग - कोज्या\,ख}$

८ । $(कय)^{घाक} = (खव)^{घाख},\; ख^{घाय} = क^{घाव}$

इन समीकरणों में से य और व का मान निकालो ।

९ । किसी त्रिभुज में का ज्या क + खा ज्या + गा ज्या ग

$= २\{प\,कोज्या\,क + फ\,कोज्या\,ख + ब\,कोज्या\,ग\}$

यहां प,फ,ब, क,ग,ख कोण से उनके सन्मुख के भुजाओं पर के लम्ब की लम्बाई हैं ।

१० । यदि $घा_{च}क,\; घा_{छ}ख,\; घा_{ज}ग$ अनुपात श्रेणी में हो तो

$$\frac{१}{घा_{क}च}+\frac{१}{घा_{ग}ज}=\frac{२}{घा_{ख}छ}$$

च

१ । यदि $\frac{\text{स्प}(\text{क} - \text{ख})}{\text{स्प क}} = १ - \frac{\text{ज्या}^{२}\text{य}}{\text{ज्या}^{२}\text{क}}$ तो स्प क स्प ख = स्प² य

२ । नीचे लिखे हुए समीकरणों में म का मान क की राशि में निकालो।

$$\text{म}^{२} = ३\ \text{कोज्या}^{२}\ \text{फ} + १,\ \text{स्प}^{२}\frac{\text{फ}}{२} = \text{स्प क}$$

३ । यदि क + ख + ग = π तो यह सिद्ध करो कि कोस्प य = कोस्प क + कोस्प ख + कोस्प ग; यह ज्ञात है कि ज्या³ य = ज्या (क − य) ज्या (ख − य) ज्या (ग − य)

४ । $\text{ज्या}^{२}\,२\text{य} - \text{ज्या}^{२}\,\text{य} = \frac{१}{४}$

इसमें य का मान क्या है?

५ । सिद्ध करो कि $\text{ज्या}^{१}\sqrt{\frac{\text{य}}{\text{क} + \text{य}}} = \text{स्प}^{१}\sqrt{\frac{\text{य}}{\text{क}}}$

६ । सिद्ध करो कि $\text{कोस्प}^{१}\frac{\text{क}_{१} - \text{क}_{२}}{१ + \text{क}_{१}\text{क}_{२}} + \text{कोस्प}^{१}\frac{\text{क}_{२} - \text{क}_{३}}{१ + \text{क}_{२}\text{क}_{३}} + \cdots$

$$\cdots\cdots\cdots = \text{स्प}^{१}\,\text{क}_{१} - \text{स्प}^{१}\,\text{क}_{न}$$

७ । यदि पानी के तल पर उस से १०' फुट ऊंची दो वस्तु एक दूसरे के स्थान से तब तक दिखाई दें जब तक कि उनकी दूरी ८ मील से अधिक नहीं है तो पृथ्वी का व्यास क्या है?

८ । किसी त्रिभुज के भुजाओं का योग = २ सा, उसका क्षेत्रफल = क्ष तो यह सिद्ध करो कि का = सा − $\frac{\text{क्ष}}{\text{सा}}$ कोस्प $\frac{\text{क}}{२}$

९ । यदि कोई चतुर्भुज वृत्तान्तर्गत और वृत्तबहिर्लग्न हो सके तो उसका क्षेत्रफल = $\sqrt{\text{का खा गा छा}}$ जहां कि का, खा, गा, छा उसके भुजाओं की लम्बाई हैं ।

१० । किसी त्रिभुज की भुजाएं का, खा, गा हैं और र अन्तर्लग्नवृत्त का व्यासार्द्ध है यह सिद्ध करो कि

$$(सा - का)\{र^2 + (सा - खा)^2\}\{र^2 + (सा - गा)^2\} +$$
$$(सा - खा)\{र^2 + (सा - गा)^2\}\{र^2 + (सा - का)^2\} +$$
$$(सा - गा)\{र^2 + (सा - का)^2\}\{र^2 + (सा - खा)^2\}$$
$$= २ \, का \, खा \, गा \, र^2$$

क्ष

१ । यदि $\frac{म \, स्प (क - य)}{कोज्या^2 य} = \frac{न \, स्प \, य}{कोज्या^2 (क - य)}$ तो

$$स्प (क - २ य) = \frac{न - म}{न + म} स्प \, क$$

२ । यदि $\sqrt{(च^2 - छ^2)}$ कोज्या ख + च ज्या ख = छ ज्या ख

तो छ = च कोज्या (क + ख)

३ । किसी वृत्तार्द्ध का व्यास जिसकी लम्बाई २ र है किसी बिन्दु पर दो भाग में किया जाता है इनको व्यास मान कर दो वृत्तार्द्ध खींचे जाते हैं इनके व्यासार्द्ध $र_1$ $र_2$ हैं यदि एक ऐसा वृत्त खींचा जावे कि तीनों वृत्तार्द्धों को स्पर्श करे तो इसका व्यास $= २ \frac{र \, र_1 \, र_2}{र^2 - र_1 \, र_2}$ ।

४ । यदि $य = \frac{क + ख + ग}{२}$ तो सिद्ध करो कि

$$कोज्या^2 य + कोज्या^2 (य - क) + कोज्या^2 (य - ख) + कोज्या^2 (य - ग)$$
$$= २ + २ \, कोज्या \, क \, कोज्या \, ख \, कोज्या \, ग ।$$

५ । किसी न तुल्य बाहु के क्षेत्र के बहिर्लग्न और अन्तर्लग्न वृत्तों के व्यासार्द्ध $र, र_1$ हैं तो यह सिद्ध करो कि

$र + र_1 = क \, कोस्प \frac{\pi}{२ न}$, २ क एक भुजा की लम्बाई है ।

६ । यदि $\text{कोज्या}^{-1} \text{य} + \text{कोज्या}^{-1} (१ - \text{य}) = \text{कोज्या}^{-1} (-\text{य})$

तो $\text{य} = \frac{१}{२}$ अथवा ० ।

७ । एक समकोणत्रिभुज कखग के कर्ण कख में एक ऐसा बिन्दु घ लिया गया है कि कघ : खघ = गख : गक तो सिद्ध करो कि

$$\text{स्प कगघ} = \frac{\text{का}^2}{\text{खा}^2} \text{ और } \text{गघ} = \frac{\sqrt{\text{का}^4 + \text{खा}^4}}{\text{का} + \text{खा}}$$

८ । यदि $\text{कोज्या} (\text{स} - २\text{क}) + \text{कोज्या} (\text{स} - २\text{ख}) = \text{कोज्या} (\text{स} - २\text{ग}) + \text{कोज्या} (\text{स} - २\text{घ})$ और $२\text{स} = \text{क} + \text{ख} + \text{ग} + \text{घ}$ तो $\text{स्पक स्पख} = \text{स्पग स्पघ}$ ।

९ । कखग समकोणसमद्विबाहुत्रिभुज के कर्ण कख में घ एक ऐसा बिन्दु लिया गया है कि $\text{गघ} = \frac{५}{७} \text{गख}$, सिद्ध करो कि $\frac{\text{कघ}}{\text{खघ}} = \frac{३}{४}$

१० । $\text{ज ज्या क} - \text{च ज्या} (\text{क} + \text{ख}) = ०$

$\text{च ज्या ख} - \text{छ ज्या क} = ०$

$\text{कोज्या क} - \text{कोज्या ख} = २\text{म}$

तो $(\text{च} - \text{छ}) \{(\text{च} + \text{छ})^2 - \text{ज}^2\} + ४\,\text{चछजम} = ०$

ज

१ । यदि $\text{कोज्या क कोज्या य} + \text{कोज्या ख कोज्या व} + \text{कोज्या ग कोज्या र} = \text{कोज्या}^2 \text{क} + \text{कोज्या}^2 \text{ख} + \text{कोज्या}^2 \text{ग} = \text{कोज्या}^2 \text{य} + \text{कोज्या}^2 \text{व} + \text{कोज्या}^2 \text{र}$ तो $\frac{\text{कोज्या क}}{\text{कोज्या य}} = \frac{\text{कोज्या ख}}{\text{कोज्या व}} = \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{कोज्या र}} = १$

२ । यदि

$$\frac{\text{च ज्या}^2\text{क} + \text{छ ज्या}^2\text{ख}}{\text{छ कोज्या}^2\text{क} + \text{ज कोज्या}^2\text{ख}} = \frac{\text{छ ज्या}^2\text{क} + \text{ज ज्या}^2\text{ख}}{\text{ज कोज्या}^2\text{क} + \text{च कोज्या}^2\text{ख}} =$$

$$\frac{\text{ज ज्या}^2\text{क} + \text{च ज्या}^2\text{ख}}{\text{च कोज्या}^2\text{क} + \text{छ कोज्या}^2\text{ख}}$$ तो $\text{च}^3 + \text{छ}^3 + \text{ज}^3 = ३\,\text{चछज}$ ।

३ । यदि $\text{क} + \text{ख} + \text{ग} = (२\text{म} + १)\pi$ अथवा $२\text{म}\pi + \frac{\pi}{२}$ तो

$(\text{ज्या क} + \text{कोज्या क})\,(\text{ज्या ख} + \text{कोज्या ख})\,(\text{ज्या ग} + \text{कोज्या ग}) = $
$२\,\text{ज्या क ज्या ख ज्या ग} + २\,\text{कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग} + १$

४ । $\frac{\pi}{४}$ स्प य   य में से य का मान निकालो ।

५ । यदि $\text{त}_१$, $\text{त}_२$, $\text{त}_३$, $\text{त}_४$ इन चार त्रिभुजों का क्षेत्रफल हो जिनकी भुजाएं खा, गा, घा, गा, घा, का घा, का, खा, का, खा, गा हैं तो यह सिद्ध करना है कि

$$\frac{\text{त}_१^2 - \text{त}_२^2}{\text{का}^2 - \text{खा}^2} + \frac{\text{त}_३^2 - \text{त}_४^2}{\text{गा}^2 - \text{घा}^2} = \frac{\text{त}_२^2 - \text{त}_३^2}{\text{खा}^2 - \text{गा}^2} + \frac{\text{त}_४^2 - \text{त}_१^2}{\text{घा}^2 - \text{का}^2}$$

६ । यदि च छ ज गुणोत्तर श्रेणी में हो और $\text{घा}_{\text{ज}}\,\text{च}$, $\text{घा}_{\text{छ}}\,\text{ज}$, $\text{घा}_{\text{च}}\,\text{छ}$ अनुपात श्रेणी में हो तो इस श्रेणी का अन्तर $\frac{३}{२}$ होगा ।

७ । इन समीकरणों में से य, व, र, ल, का मान निकालो

$$\text{ल} = \frac{\text{ज्या य}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{ज्या व}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{ज्या र}}{\text{ज्या ग}},\ \text{य} + \text{व} + \text{र} = \pi$$

८ । क्षेत्र के द्वारा यह सिद्ध करो कि $\text{स्प}\left(\frac{\pi}{४} + \text{क}\right) = \frac{१}{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{४} - \text{क}\right)}$

९ । यदि $\text{कोज्या य} = \text{कोज्या क कोज्या ख}$

$\text{कोज्या य}_१ = \text{कोज्या क}_१\ \text{कोज्या ख}_१$

और स्प $\frac{\text{य}}{\text{२}}$ स्प $\frac{\text{य}_{\text{१}}}{\text{२}}$ = स्प $\frac{\text{ख}}{\text{२}}$

तो ज्या² ख = (छे² क − १) (छे² $\text{क}_{\text{१}}$ − १)

१० । किसी सूच्याकारस्तंभ के बाह्यभाग समत्रिबाहु त्रिभुज हैं और आधार वर्गक्षेत्र है. वर्ग और त्रिभुज के बीच का कोण निकालना है ।

भ्र

१ । यदि स्प²क स्प$\text{क}_{\text{१}}$ = स्प²ख स्प$\text{ख}_{\text{१}}$ = स्प²ग स्प$\text{ग}_{\text{१}}$ = स्पक स्पख स्पग

और कोछे २क + कोछे २ख + कोछे २ग = ०

तो स्प (क − $\text{क}_{\text{१}}$) = स्प (ख − $\text{ख}_{\text{१}}$) = स्प (ग − $\text{ग}_{\text{१}}$)

२ । किसी त्रिभुज में

ज्या १० क + ज्या १० ख + ज्या १० ग = ४ ज्या ५ क ज्या ५ ख ज्या ५ ग

३ । किसी त्रिभुज में $\frac{५\pi + \text{क}}{२^५}$, $\frac{५\pi + \text{ख}}{२^५}$, $\frac{५\pi + \text{ग}}{२^५}$ की कोस्पर्शरेखा का योग उनके गुणनफल के तुल्य है ।

४ । यदि $\frac{\text{कोज्या} (\text{ख} + \text{क}) + \text{कोज्या} (\text{क} + \text{ग})}{\text{कोज्या} (\text{ख} - \text{क}) + \text{कोज्या} (\text{क} - \text{ग})}$

$\frac{\text{कोज्या} (\text{ख} + \text{ग}) + \text{कोज्या} (\text{क} + \text{ग})}{\text{कोज्या} (\text{ग} - \text{ख}) + \text{कोज्या} (\text{क} - \text{ग})}$ तो $\frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ग} - \text{कोज्या क}}$

$+ \frac{\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या क ज्या ग}} = \frac{\text{१}}{\text{ज्या} (\text{क} - \text{ग})}$

५ । एक त्रिभुज की भुजाएं अनुपात श्रेणी में है सब से बड़ा कोण क है और सब से छोटा ख है यह सिद्ध करो कि

४ (१ − कोज्या क) (१ − कोज्या ख) = कोज्या क + कोज्या ख

६ । उन कोणों का मान निकालो जिनकी कोज्या : स्पर्शरेखा = ३ : २

७ । यह सिद्ध करो कि समद्विबाहुत्रिभुज के अन्तर्लग्नवृत्त का व्यासार्द्ध बहिर्लग्नवृत्त के व्यासार्द्ध के आधे से अधिक नहीं हो सकता

८ । तीन वृत्त जिन के व्यास $\sqrt{३} - १$, $\sqrt{३} + १$, और $३ - \sqrt{३}$ हैं क, ख, ग, बिन्दु में परस्पर स्पर्श करते हैं। कखग त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो ।

९ । दो वृत्त जिन के व्यासार्द्ध र र$_१$ है बाहर से स्पर्श करते हैं यदि य दो ऐसी रेखाओं के बीच का कोण हो जो प्रत्येक दोनों वृत्तों को स्पर्श करती है तो

$$\text{ज्या } य = \frac{४(र - र_१)\sqrt{र र_१}}{(र + र_१)^२}$$

१० । सूर्य्य पर से पृथ्वी के व्यासार्द्ध के साम्हने का कोण ८″·५७ है यदि पृथ्वी का व्यासार्द्ध ज्ञात हो तो सूर्य्य की दूरी क्या है?

उत्तर ।

अध्याय १

११ । ६०$^{\text{ग}}$ ५६′ ६३″·५ .... १२ । ५२$^{\text{ग}}$ १७′ १″·३२ ·

१३ । २२° ३०′· १४ । $\frac{३\pi}{५}$ · १५ । १३०$^{\text{ग}}$· १६ । $\frac{२५०}{\pi}$ · १७ । ११ ·

१८ । १६ वा ९· १९ । $\pi - \frac{१९\pi^{२}}{१८००}$ · २० । $\frac{५\pi}{१९}$ · २१ । $\frac{\pi}{६}$ ·

२२ । $१०० - \frac{१०\pi}{९}$ · २३ । $\frac{१५०}{\pi}$ · २४ । $\frac{\pi \text{र}}{७२०}$ · २५ । $\frac{५}{२}$ ·

२६ । २०° और ३०°· २७ । २४ ४८°,९६°,१९८°· २८ । १४४,१०८·

अध्याय २

७ । $\text{ज्या} = \frac{५}{\sqrt{३४}}$ · ८ । $\text{कोज्या} = \frac{\sqrt{३९}}{८}$, $\text{स्परे} = \frac{५}{\sqrt{३९}}$ ·

९ । $\text{ज्या} = \frac{२\sqrt{२}}{३}$, $\text{कोज्या} = \frac{१}{३}$ · १० । $\text{ज्या} = \frac{५}{१३}$, $\text{कोज्या} = \frac{१२}{१३}$ ·

११ । $\text{ज्या} = \pm \frac{३}{५}$ · २१ । $\frac{\pi}{६}$ वा $\frac{\pi}{८}$ · २२ । $\frac{\pi}{३}$ ·

२३ । ४५° वा स्प य = ३· २४ । $\pm \frac{\pi}{३}$ ·

२८ । $\pm \frac{\sqrt{२}\,\{\text{म}^{२} + \text{न}^{२}\}}{\text{म} + \text{न}}$ · ३० । $\text{म}^{२} + \text{न}^{२} = १$ ·

३१ । $(\text{म}^{२} - \text{न}^{२})^{२} = १६\,\text{मन}$· ३२ । $\frac{\text{म}}{\text{न}}$ ·

३४ । $\text{ज्या क} = \sqrt{\frac{\text{म}^{२} - \text{न}^{२}}{१ - \text{न}^{२}}}$, $\text{कोज्या ख} = \frac{\text{न}}{\text{म}} \sqrt{\frac{१ - \text{म}^{२}}{१ - \text{न}^{२}}}$ ।

अध्याय ३

३ । −६०, +६०, ३०° के त्रि॰ संबंधों के तुल्य है॰

४ । ९० के त्रि॰ सं॰ के तुल्य॰   ५ । ४५° के त्रि॰ सं॰ के तुल्य॰

६ । ४५,२२५,४०५ आदि॰   ७ । −कोज्या य और −कोस्प य॰

९ । $\text{ज्या} = (-१)^{\text{म}} \frac{\sqrt{७}}{४}$॰ १० । $\frac{१}{२}, \frac{\sqrt{३}}{२}, -\frac{१}{२}, -\frac{\sqrt{३}}{२}$ ।

अध्याय ४

३ । $\text{न}\pi \pm \frac{\pi}{६}$॰ ४ । $\text{न}\pi - \frac{\pi}{४}$॰ ५ । $\text{न}\pi + (-१)^{\text{न}} \frac{\pi}{६}$॰

६ । $\frac{४\text{न} \pm १}{२(३ \pm १)}\pi$॰ ७ । $२\text{न}\pi \pm \frac{\pi}{३}$॰ ८ । $२\text{न}\pi \pm \frac{\pi}{३}$॰

९ । $\text{न}\pi + \text{क}$॰ ११ । $\text{न}\pi + (-१)^{\text{न}+१}\text{य}$ ।

अध्याय ५

५१ । $२ + \sqrt{२} - \sqrt{३} - \sqrt{६}$॰

५३ । $\text{ज्या}\, ९ = \frac{\sqrt{(३ + \sqrt{५})} - \sqrt{(५ - \sqrt{५})}}{४}$॰

५४ । $\text{ज्या}\, ३ = \frac{\sqrt{३} + १}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५} - १) - \frac{\sqrt{३} - १}{८}\sqrt{५ + \sqrt{५}}$॰

५५ । $२\text{न}\pi \pm \frac{\pi}{२}$ और $\frac{(६\text{न} \pm २)\pi}{९}$॰ ५६ । $\frac{\text{न}\pi}{८}$॰

५७ । $\frac{२}{५}\left(\text{न}\pi + \frac{\pi}{४}\right)$ वा $२\text{न}\pi + \frac{\pi}{२}$॰

५८ । $२\text{न}\pi$ वा $\text{न}\pi + (-१)^{\text{न}}\frac{\pi}{५}$॰

५९ । $\text{न}\pi \pm \frac{\pi}{४}$ वा $\text{न}\pi \pm \frac{\pi}{६}$॰   ६० । $\text{न}\pi \pm \frac{\pi}{४}$॰

६५ । $\left(\frac{प^२}{ब^२}+\frac{ब^२}{क^२}\right)^२ - ३\left(\frac{प^२}{ब^२}+\frac{ब^२}{क^२}\right) - २\frac{प}{ब} = ०$

अध्याय ६

६ । क = ·२२१· ७ । क = ० वा १·४· ८ । १·९९१२२६, १·६८, — ·३२२२२०५· ९ । ·५८४३४९१· १० । ·०००००४२३६६·

११ । १·०६· १२ । $क = \frac{घा \frac{१}{२}(१ \pm \sqrt{५})}{घा ग}$ ।

अध्याय ८

३ । ख = ४५° वा १३५°· ४ । क = ३०° वा १५०°·

५ । ख = ४५° वा १३५°· ६ । क = ६९° १०′ १०″·
ख = ४६° ३०′ ५०″·

७ । १०८° ५८′ ६″·१
६०° १′ ५३″·९ ८ । ५७° १०′ और ४७° ५०′·

९ । ९·६७३३९३७·

१० । ख = ७१° ४४′ २९″· ११ । ख = १′ २९″·

१२ । ६९°, ४९′ ३५″
५०° १०′ २५″· १३ । ३०° वा १५०°·

अध्याय ९

५ । २१$\sqrt{११}$· ६ । $\frac{२२५}{२(\sqrt{३}+१)}$· ८ । $\frac{१६}{४५}$ ।

अध्याय १०

३ । $\frac{\sqrt{३}+१}{२}$ मील·

५ । ऊंचाई $= \dfrac{\text{घ स्पक स्पख}}{\text{स्पक} - \text{स्पख}}$, पाट $= \dfrac{\text{घ स्पख}}{\text{स्पक} - \text{स्पख}}$

६ । $\dfrac{३५२}{५\sqrt{३९}}$ ७ । $\dfrac{२०}{\sqrt{(२\sqrt{५}+२)}}$.   ८ । ५१९·६ गज़.

९ । ६३°२६′५″·८१. १० । १५० फुट.   ११ । १८०·२३ फुट.

त्रिकोणमितीय प्रश्न

(क)

१ । $\dfrac{\pi}{२}\left(१ - \dfrac{\text{क}}{१८०}\right)$ ३ । $२\text{न}\pi \pm \dfrac{\pi}{३}$.   ७ । ·५१७२८१८.

९ । $\text{कोज्या}\,\dfrac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = \dfrac{\text{खा} + \text{का}}{\text{का}}\,\text{ज्या}\,\dfrac{\text{क}}{२}$ ।

(ख)

३ । $\dfrac{१}{\text{व}} + \dfrac{१}{\text{छ}} \quad \dfrac{१}{\text{प}} + \dfrac{१}{\text{फ}}$.   ९ । ११०५०.

(ग)

१ । $\text{ज्या}^{-१}\dfrac{\text{म ज्या क}}{\sqrt{(\text{म}^२ + \text{न}^२ + २\,\text{मन कोज्या क})}}$,

$\text{ज्या}^{-१}\dfrac{\text{न ज्या क}}{\sqrt{(\text{म}^२ + \text{न}^२ + २\,\text{मन कोज्या क})}}$.   ४ । $\sqrt{३} + १$.

६ । $\dfrac{१}{२}$.   ८ । क = ११६°३३′५४″ ख = २६°३३′५४″.

(घ)

२ । $\dfrac{२\text{म}+१}{२(\text{न}+१)}\pi$.   ३ । $\text{कख} = \text{ग}^२ + \text{घ}^२ - \text{क}^२ - \text{ख}^२$.

८ । $\text{य} = \dfrac{१}{\text{क}}, \text{र} = \dfrac{१}{\text{ख}}$.

(च)

२ । $म = \dfrac{२}{(\text{कोज्या}^{\frac{२}{३}} क + \text{ज्या}^{\frac{२}{३}} क)^{\frac{३}{२}}}$

४ । $य = \left(न \pm \dfrac{१}{५} \pm \dfrac{१}{१०} \right) \pi.$

६ । ४९° १८′ ··· ७ । ४२२४ मील·

(ज)

४ । $य = \dfrac{\pi}{४}$ · ७ । $य = \text{कोज्या}^{-१} \dfrac{\text{ज्या}^{२} क - \text{ज्या}^{२} ख - \text{ज्या}^{२} ग}{२ \,\text{ज्या}\, ख \,\text{ज्या}\cdot ग}.$

(झ)

६ । $न\pi + \dfrac{\pi}{६}, न\pi + \dfrac{५\pi}{६}$ ८ । $\dfrac{३ - \sqrt{३}}{८}.$

१० । $२४१०९ \times र$ ·

GLOSSARY.

अंश Degree

अगम्य Inaccessible.

अज्ञात Unknown.

अधिककोणत्रिभुज Obtuse angled triangle.

अनन्त Infinite.

अनुपातश्रेणी Arithmetical progression.

अनुमान Corollary.

अन्तः कोण Interior angle.

अन्तर Difference.

अन्तर्गत Inscribed.

अन्तर्लग्न Inscribed.

अपवर्त्य Multiple

अवयव Element, part.

आधार Base.

उत्क्रमज्या Versed sine.

उन्नतिकोण Angular elevation, altitude.

ऋण Minus, negative.

कला Minute.

केन्द्र Centre.

कोटिच्छेदनरेखा Cosecant.

कोटिज्या Cosine.

कोटिस्पर्शरेखा Cotangent.

कोट्युत्क्रमज्या Coversed sine.

कोण Angle.

क्षेत्रफल Aréa.

गुणोत्तरश्रेणी Geometrical progression.

घातमापक Logarithm.

चक्रीयमाप Circular measure.

चतुर्थांश Quadrant.

चाप Arc.

चिह्न Sign.

छेदनरेखा Secant.

ज्या Sine.

ज्ञात Known.

तिर्यक् Horizontal.

तुल्य Equal.

त्रिकोणमिति Trigonometry.

त्रिकोणमितीयसम्बन्ध Trigonometrical ratio.

द्विसमकोणावशिष्ट Supplement.

धन Plus, positive.

न्यूनकोणत्रिभुज Acute angled triangle.

पदसमूह Expression.

परिधि Circumference.

परिमाण Magnitude, measure.

प्रमाण Unit.

प्रवणसमतल Inclined plane.

प्रवणत्व Inclination.

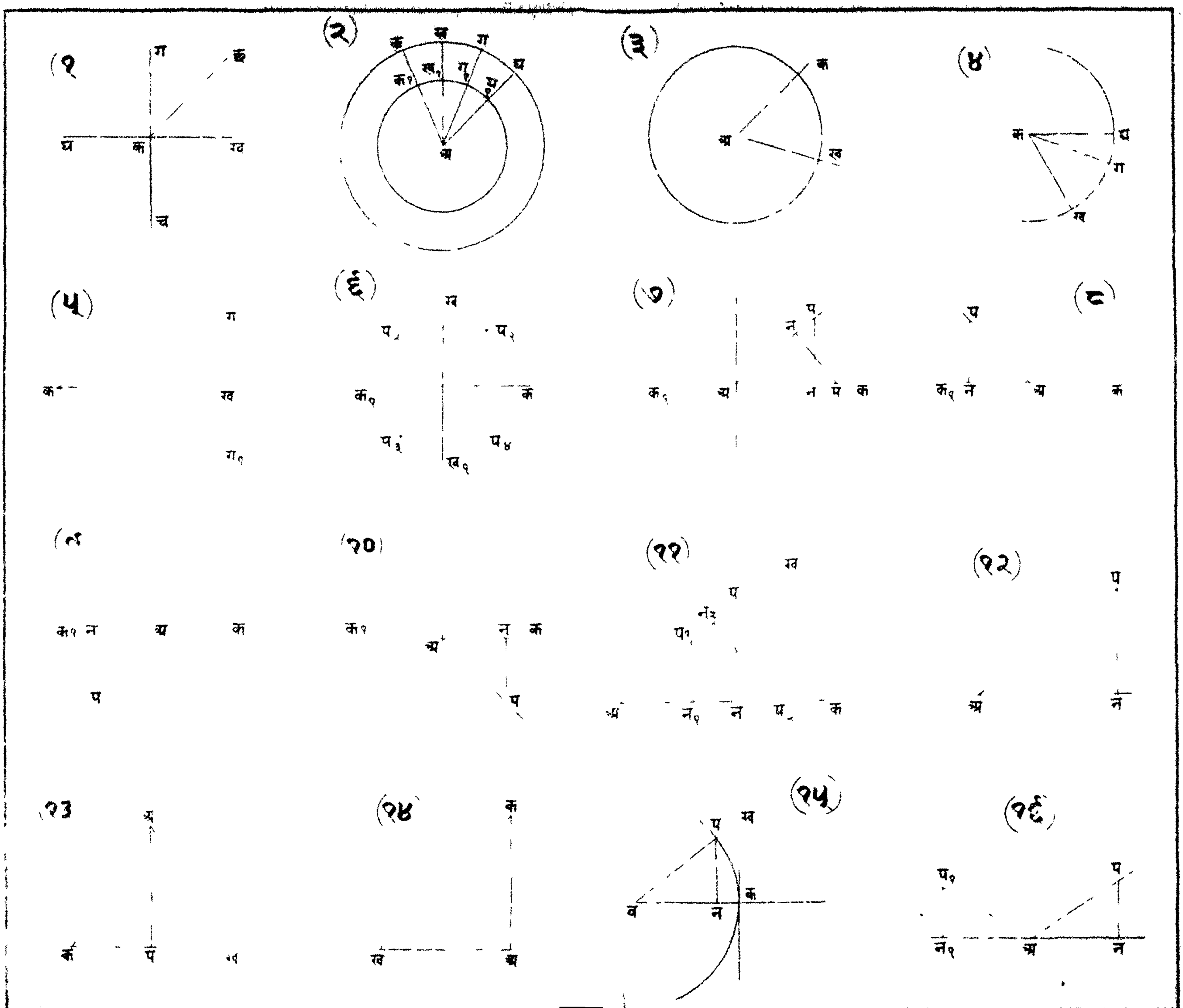
भाजक Divisor.

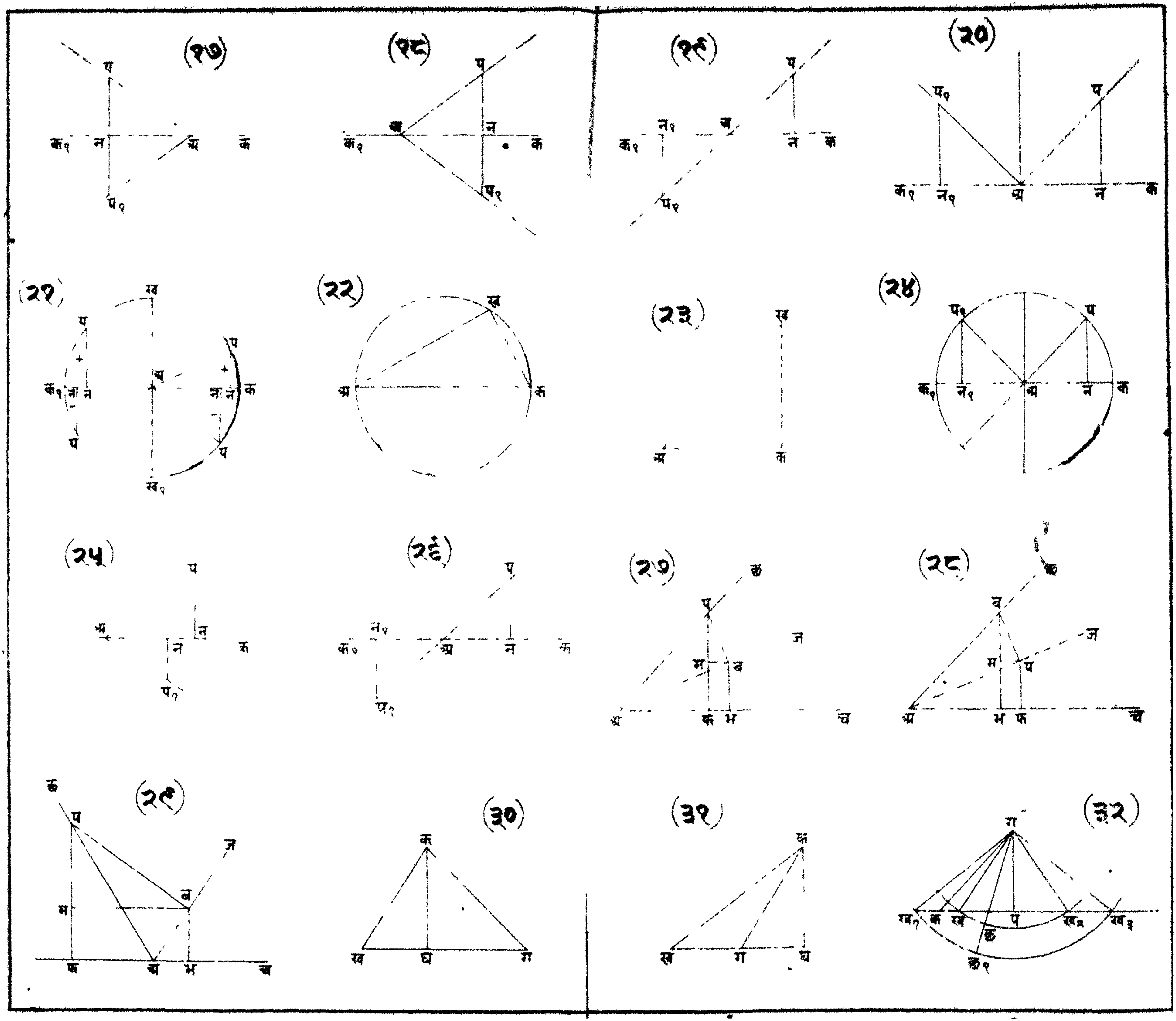
भाज्य Dividend.

भिन्नाङ्क Fraction, mantissa.

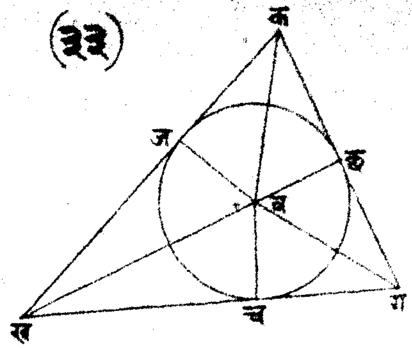
भुजा Side.

मापना To measure.

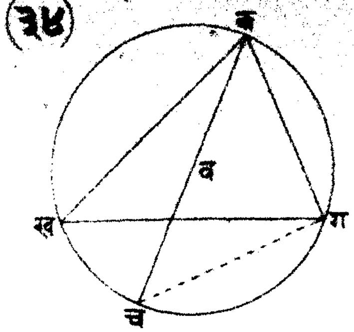

(१) ग क घ क ख च
(२) क ख ग घ क१ ख१ ग१ घ१ अ
(३) क अ ख
(४) क घ ग ख
(५) ग क ख ग१
(६) ख प१ प२ क१ क प३ प४ ख१
(७) प न१ क१ अ न प क
(८) प क१ न अ क
(९) क१ न अ क प
(१०) क१ अ न क प
(११) ख प न२ प१ अ न१ न प२ क
(१२) प अ न
(१३) अ क प ख
(१४) क ख अ
(१५) प ख क व न
(१६) प१ प न१ अ न


(१७)
(१८)
(१९)
(२०)
(२१)
(२२)
(२३)
(२४)
(२५)
(२६)
(२७)
(२८)
(२९)
(३०)
(३१)
(३२)

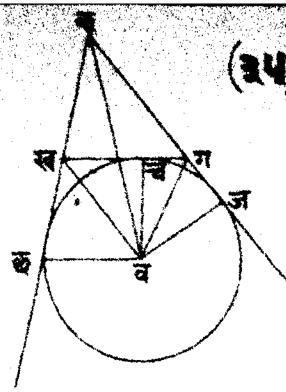
(३३)



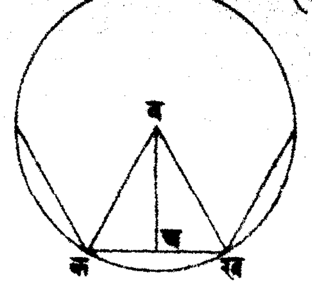
(३४)



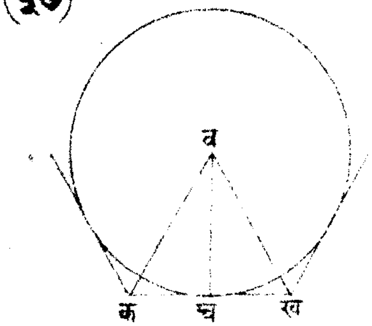
(३५)



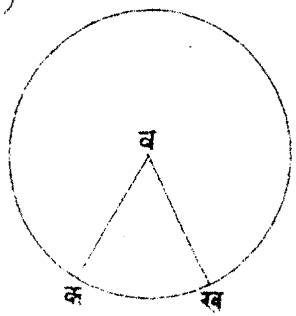
(३६)



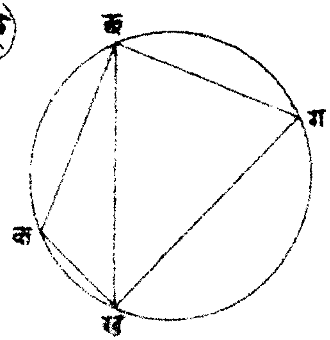
(३७)



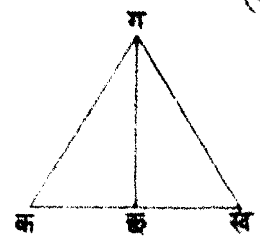
(३८)



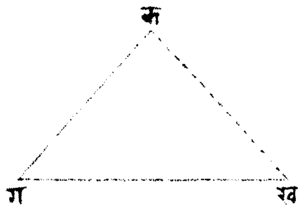
(३९)



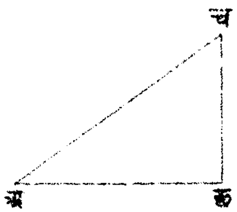
(४०)



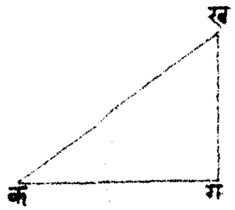
(४१)



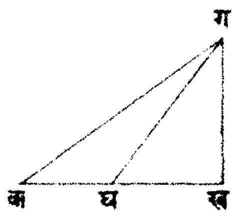
(४२)



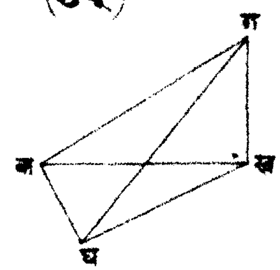
(४३)



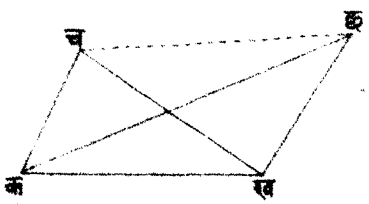
(४४)



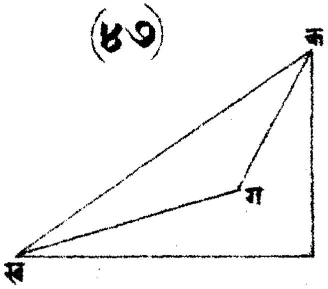
(४५)



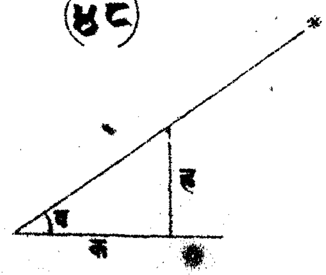
(४६)



(४७)



(४८)



(४९)

